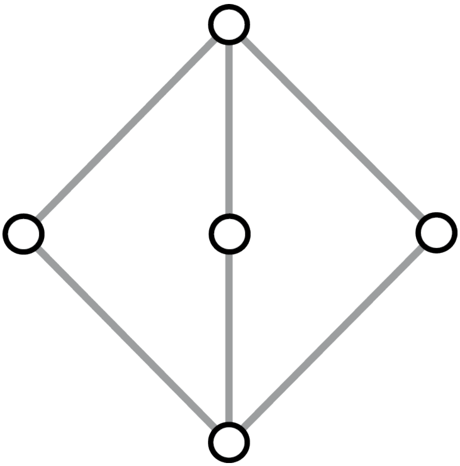
Juan Grompone

Estudios sobre lógica dialéctica (2017)



La flor del Itapebí
2017

Estudios sobre lógica dialéctica

Versión 1, 1985, inédita.

Versión 2, 1989. Publicada originalmente en GALILEO, publicación dedicada a problemas metacientíficos del Instituto de Filosofía de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad de la República, bajo la dirección de Mario H. Otero, Alción Cheroni y Juan A. Grompone. Segunda época, Número 3–4, octubre 1989.

Versión 3, 2003. Publicada en forma electrónica en el sitio Web indicado más abajo.

Versión 4.3, 2017–19, Publicada en forma electrónica en el sitio Web.
Versión 4.4, 2021.

e-mail: jgrompone@ieee.org
Web: www.grompone.org

26 de marzo 1185, ap. 201, Montevideo, Uruguay.
tel: 2709 1620
e-mail: itapebi@itapebi.com.uy
Web: www.itapebi.com.uy

Armado en LaTeX.

ISBN 978-9974-592-34-6

Dedicatoria

Dedico este libro a la memoria de apreciados maestros que fueron responsables, involuntarios, de este libro

Cuando comencé mis estudios universitarios sentía una gran atracción por la matemática. Fue así que participé en un seminario elemental del Instituto de Matemática en la Facultad de Ingeniería. En una de las primeras reuniones José Luis Massera me preguntó qué rama de la matemática me interesaba más. Yo, tímidamente, le respondí "la lógica matemática". Era mi interés en aquellos tiempos en que desconocía casi todo el contenido de la matemática. Fue entonces cuando Massera se rió como solía hacerlo y me dijo unas palabras que me han quedado grabadas a fuego. Las cito como las recuerdo.

> Cuando sea viejo, y tenga demencia senil, me dejaré una barbita y me dedicaré a la lógica matemática.

Tal era su opinión tajante y despreciativa por este tema. Por eso ahora, que ha pasado más de medio siglo y he recuperado mi vocación primera, quiero dedicar este libro a la memoria de José Luis Massera, mi apreciado profesor. Tal vez él no hubiese aprobado el intento de formalizar la dialéctica pero no me cabe duda que lo habría leído con una cierta curiosidad. Es seguro que en más de una ocasión habría emitido alguna de sus carcajadas homéricas.

El segundo maestro fue Fernando Forteza. Comencé a formalizar la dialéctica hacia fines de los 1970s, en plena dictadura. En ese tiempo había sido destituido de la Universidad y se me había prohibido la entrada a la Facultad de Ingeniería. De esta manera no podía acceder a la Biblioteca del Instituto de Matemática. Por esta razón no tenía acceso a la bibliografía sobre reticulados que era el ambiente natural de la lógica. Un día me encontré con Forteza y le pedí, con cierta timidez, si me podía prestar el libro de Birkhoff [4] que estaba en la biblioteca. Un par de días después me lo trajo y rápidamente hice una fotocopia completa y se lo devolví. Este libro fue fundamental para este estudio.

El tercer maestro fue Mario H. Otero quien confió en estos *Estudios* –y también en otras aventuras intelectuales– y los publicó en la revista "Galileo" de la Facultad de Humanidades y Ciencias, a pesar de lo exótico del tema en el ambiente de la epistemología. También este libro recuerda su memoria y su generosidad intelectual.

Contenido

Prólogo

Este libro se divide en tres partes. En la primera se fundamenta el empleo de la dialéctica con ejemplos de las lenguas naturales, de formas espontáneas de pensamiento dialéctico y de casos históricos relevantes. Esta sección finaliza en el capítulo denominado “introducción intuitiva”. No se emplean allí recursos matemáticos ni se realiza ninguna formalización. La segunda parte comienza en el capítulo siguiente, “formalización”, y continúa hasta el penúltimo capítulo. En esta parte se emplean recursos algebraicos y se formaliza la teoría. En el capítulo final se aplica la dialéctica expuesta a las ciencias formales, experimentales y sociales. En resumen, el lector que desee omitir la formulación matemática puede pasar desde la “introducción intuitiva” al capitulo final. En caso de algunas dudas sobre el significado de los conceptos puede consultar el índice analítico.

La lógica dialéctica que se estudia en este libro es una extensión multivaluada de la lógica binaria. Se trata de una estructura matemática definida en un reticulado que posee un grupo de automorfismos y anti–automorfismos. Este doble carácter hace que se trate de una estructura formal que posee mucha riqueza de propiedades y de posibles aplicaciones.

Estos estudios son el resultado de una síntesis que intenta conciliar la lógica binaria tradicional, la versión bastante informal de la dialéctica de Hegel y las estructuras del pensamiento espontáneo humano que no son asimilables o comprensibles mediante la lógica binaria tradicional.

En esta cuarta revisión del trabajo creo que se ha ganado mucho en claridad y en sus aplicaciones. Una diferencia importante con las versiones anteriores de debe al aumento de velocidad de las computadoras y las posibilidades de examinar sistemáticamente el estudio de las funciones. Es cierto que todavía queda mucho por hacer porque el tiempo de cálculo aumenta mucho al considerar reticulados más complejos.

Más que mérito mío, en su gran mayoría las mejoras se deben a la intervención de Rafael Grompone que tuvo la paciencia de revisar cuidadosamente este libro, objetar, discutir, sugerir modificaciones, alguna de las cuales todavía no ha sido incorporada a esta versión. La otra intervención importantes es la de Lucía Grompone quien revisó los diagramas, los corrigió y me propuso un estilo coherente para la mejor presentación de este libro. A ambos estoy muy agradecido. Sin embargo no puede pensarse que ésta sea una versión definitiva. Hay múltiples aspectos que quedan todavía sin explorar y hay todavía algunos problemas y lagunas notorias. En esta versión se ha dejado de lado, por ejemplo:

- modificar ligeramente la notación matemática de las negaciones a los efectos de preservar la simetría de los reticulados respecto a los valores centrales, ver la nota de página 122;
- analizar sistemáticamente las funciones lógicas en reticulados con $r > 3$;
- ampliar el estudio de los cuantificadores dialécticos, apenas esbozados en esta versión;
- completar el estudio dialéctico de las paradojas citadas en el capítulo correspondiente;
- analizar la formalización de Battro–Piaget [2, III, 1] sobre la lógica operatoria.

Serán considerados en futuras versiones de este documento, así como todas las observaciones y correcciones que se hagan llegar a las direcciones de correo disponibles.

Montevideo, julio de 2017.

En *www.grompone.org* se encuentran los programas C que permiten estudiar las funciones lógicas de los reticulados mencionados en este libro.

La lógica como imagen del universo

Introducción

El conocimiento humano es una gigantesca acumulación de enunciados. Estos enunciados forman colecciones, agrupamientos, poseen estructuras que los conectan. Las conexiones entre enunciados son conexiones *lógicas*. La colección completa de enunciados –o alguna colección parcial– puede ser pensada como una estructura *algebraica* que debemos *analizar y caracterizar*.

El universo de los *enunciados* es una abigarrada colección que puede pertenecer a cualquiera de las variedades del pensamiento humano. Para la ciencia de la lógica, no es solamente en el pensamiento matemático donde ocurre la estructura lógica. En todas partes donde reconocemos una cierta "coherencia" –es decir, una estructura formal– estamos en presencia de una manifestación de la lógica. Así por ejemplo, debemos considerar como aceptables:

- los enunciados de los pensadores presocráticos griegos, en especial a Erakleitos (–535?, –475?),[1] sus contemporáneos o los filósofos chinos clásicos;
- los enunciados de la mecánica cuántica –y de otras ramas de la ciencia– por su peculiar "irracionalidad";
- los enunciados aimaras espontáneos –y el uso del español en algunas zonas de América– que pueden conducir a estructuras lógicas exóticas;
- los chistes, las paradojas, la poesía, en tanto le reconozcamos un valor formal y no un mero juego de palabras;

[1] Los nombres griegos no están escritos de la manera tradicional sino transliterados según las reglas aceptadas. Por esta razón Erakleitos no se escribe Heráclito y lo mismo ocurre con otros autores griegos, chinos o rusos.

- los enunciados cabalistas, esotéricos, astrológicos, en el mismo sentido anterior.

La ciencia de la lógica se ocupa de la "estructura" del pensamiento humano. Por esta razón nuestro punto de partida es la búsqueda de la estructura que posee el manejo de los enunciados que se emplean de una manera natural y espontánea.

El universo de los enunciados

Existen diferentes clases de enunciados si se los examina desde un punto de vista formal. Para comenzar, debemos diferenciar enunciados simples de enunciados compuestos. Los enunciados simples son como:

> *Amos Judd loves cold mutton.*[2]
>
> Sócrates es mortal.[3]

No interesa saber –por el momento– con demasiada precisión cuáles son los enunciados simples. En muchos casos, este carácter depende de la forma como se analice el enunciado. A los efectos de la ciencia de la lógica no es un tema de demasiada importancia.

Por el contrario, los enunciados compuestos se forman mediante enunciados simples y *conectivas lógicas*.

Todas las lenguas naturales poseen, más allá de sus peculiaridades, elementos que le permiten formular enunciados lógicos. En las lenguas herederas del latín se encuentran maneras de presentar la función negación así como las funciones básicas de dos variables de la lógica binaria. Estas funciones se expresan mediante *conjunciones*. En algunos casos algunos signos de puntuación reemplazan a conjunciones elípticas, éste es un recurso literario muy difundido como veremos.

Los lingüistas clasifican a las conjunciones según criterios que no siempre coinciden con la lógica. Llaman conjunciones *copulativas* a las que corresponden a la operación **Y** (o a su negación). Un ejemplo es:

[2] A Amos Judd le gusta el cordero frío. Fantástico enunciado de Lewis Carroll que se encuentra en [10, 11].

[3] Enunciado clásico que no debe faltar en toda obra de lógica. Ignoro su autor y lo confieso desde las primeras páginas de este libro.

> *God is dead. Marx is dead.* ***And*** *I don't feel so well myself.*[4]

Esta operación, la conjunción lógica **Y** es asociativa y conmutativa y no presenta mayores dificultades. Igual que en el ejemplo presentado, la mayoría de las lenguas permiten emplear una *coma* para expresar la operación en forma reiterada. Este uso de la coma se extiende también a otros casos.

Se llaman conjunciones *disyuntivas* a las correspondiente a la operación lógica **O**. Unos ejemplos elementales son:

> Libertad **O** muerte.[5]
>
> Por la razón **O** la fuerza.[6]

La disyunción lógica presenta algunas dificultades. También es asociativa y conmutativa. También se suele emplear la coma para una aplicación reiterada de la función. En general, en las lenguas latinas no se duda acerca de la simetría de la operación de disyunción.[7]

En los ejemplos de disyunción siempre puede quedar la duda si se trata de la operación incluyente o excluyente. A veces, cuando se desea levantar la posible ambigüedad se lo hace en forma explícita diciendo:

> Libertad **O** muerte, *o ambas*.

Se llaman conjunciones *distributivas* a diferentes conjunciones que corresponden a la función lógica excluyente. Las formas son muy variadas en las diferentes lenguas. En general es necesario aclarar el significado (posterguemos un momento el empleo de "pero"):

> Libertad **O** muerte, *pero no ambas*.

---

[4] Dios ha muerto, Marx –a veces Einstein– ha muerto, **Y** yo no me siento muy bien. Cita, en broma, atribuida a Eugène Ionesco y repetida muchas veces sin su referencia, ver Wikiquote.

[5] Divisa de Juan Antonio Lavalleja al emprender la liberación del actual territorio de Uruguay del poder portugués.

[6] Divisa del escudo de la República de Chile.

[7] Es curioso el caso del inglés con la disyunción. La forma *either* … *or* sugiere que no existe simetría en esta operación.

Se llaman *condicionales*, *concesivas*, *ilativas* –y de otras maneras– a las conjunciones que expresan las diferentes formas de la *implicación* lógica. Tal vez esta multitud de nombres y maneras de expresarla indique algo que todavía desconocemos. Tomemos como ejemplo un típico enunciado matemático:

Si x **implica** y **entonces** z.

La negación y los enunciados negativos presentan muchas dificultades. Con toda justicia puede decirse que la ciencia de la lógica se encuentra en resolver esta cuestión. Por esta razón no insistiremos ahora en este punto.

Sin ánimo de realizar una enumeración completa por el momento, debemos recordar los enunciados de existencia:

Some *oysters are silent.*[8]

y los enunciados universales:

Todos los hombres son mortales.[9]

Hace más de 25 siglos que existe preocupación por clasificar, formalizar e interpretar estos enunciados y conectivas lógicas. En el siglo 19 se dio un enorme salto adelante cuando George Boole (1815, 1864) descubrió las primeras propiedades formales de estas estructuras. En las primeras décadas del siglo 20 se pensó que la formalización completa había terminado. Bertrand Russell (1872, 1970) mostró que bastaba, por ejemplo, con la negación y la disyunción para construir todas las conectivas lógicas restantes. También fue convincente en su tesis que solamente dos cuantificadores relacionados entre sí –existencial y universal– describían todo cuanto se necesitaba para los enunciados de las lenguas naturales.

Hay buenas razones para pensar, sin embargo, que existen estructuras lógicas que escapan a este panorama tan simple. Ocultas como comas u otros signos de puntuación, ocultas en conectivas lógicas no fácilmente identificables, pueden existir funciones lógicas que escapan al sencillo universo lógico que describía Russell.

---

8 **Algunas** ostras son silenciosas. Otro fantástico enunciado de Lewis Carroll tomado de [10, 11].

9 Otro enunciado clásico que no debe faltar en toda obra de lógica.

Los enunciados ambivalentes

Las lenguas naturales emplean palabras *ambivalentes* en forma espontánea. Algunos ejemplos pueden ilustrar esta curiosa propiedad. Comencemos por una ambivalencia que es común a las lenguas de origen indoeuropeo: el acto sexual.

En el latín existe el verbo "*futuere*" y de allí las expresiones derivadas: en francés "*foutre*", en catalán "*fotre*", en italiano "*fottere*", en español "joder" y en portugués "foder". En las lenguas germánicas existe: en inglés "*to fuck*", en alemán "*ficken*", en holandés "*fokken*", en noruego "*fukka*", en sueco "*focka*". En casi todos los casos el verbo es ambivalente: acto sexual, daño o lucha.

En español el verbo "joder" es claramente ambivalente. Por un lado expresa el acto sexual, el coito, algo esencial para la conservación de la especie y, por lo tanto –como explicaría Darwin– es placentero. Sin embargo la palabra posee también un significado contrario: engañar, hacer daño.[10] El uso llega a su máxima contradicción con la expresión reflexiva "jódete".

No debe pensarse que ésta es una peculiaridad del español. Las demás lenguas latinas también poseen la ambivalencia. En inglés el verbo "*to fuck*" tiene prácticamente el mismo uso.[11] En las lenguas germanas casi siempre ocurre la ambivalencia. Tal vez en algunos casos haya caído en desuso este aspecto de la palabra.

Hay otras expresiones que son ambivalentes. Comencemos por una clásica española: "de puta madre".[12] La expresión sirve tanto para un fuerte *insulto* o como un *elogio* igualmente fuerte.

Dejando estos aspectos sexuales, en el español americano palabras

[10] El *Diccionario de la Lengua Española* (DLE) [19] le adjudica las siguientes acepciones: practicar el coito, aguantarse o fastidiarse, estropearse o dañarse, poseer sexualmente a una mujer, molestar o fastidiar a alguien, destrozar, arruinar o echar a perder algo.

[11] El *New Oxford American Dictionary* [70] le adjudica: *have sexual intercourse with (someone), ruin or damage (something)*. Lo mismo sucede con las diversas frases verbales asociadas, inclusive la versión reflexiva *fuck yourself*.

[12] La palabra "puta" en español es ambivalente. Dice el DLE [19]: calificación denigratoria, para ponderar, para enfatizar la ausencia o la escasez de algo. En este caso hay una triple significado, negativo, positivo y neutro.

tales como "brutal", "bestial"[13] o "soberbio",[14] que para el diccionario son calificativos negativos, son empleados también como positivos y solamente el contexto lo permite diferenciar. Lo mismo sucede con el calificativo "arrecho" o "verraco".[15]

El francés posee una forma retórica de expresión conocida como "*litote*"[16] que enuncia una tesis pero quiere decir algo contrario a su enunciado evidente.[17] Un ejemplo puede ser la expresión *il n'est pas complètement stupide* (él no es completamente estúpido). En sentido directo, sin retórica, dice que la persona a veces no es estúpida. En su significado retórico quiere decir "es muy inteligente".

El *oxímoron*[18] se encuentra directamente emparentado con esta figura retórica. Ejemplos clásicos: del emperador Augusto "*Festina lente*" (apresúrate lentamente); de Shakespeare (*Romeo and Juliet*) "*feather of lead, bright smoke, cold fire, sick health*" (pluma de plomo, humo brillante, fuego helado, salud enferma[19]); de Jorge Luis Borges (*El aleph*) "una graciosa torpeza". Esto resume 20 siglos de emplear esta forma retórica contradictoria.

Finalmente, existen las *paradojas*, enunciados complejos que se contradicen a sí mismos. Este punto se analiza más adelante.

¿Cuál es la lógica de emplear palabras –o expresiones– ambivalentes con significados contrarios?[20] La dialéctica posee una explicación:

---

[13] Dice el DLE [19]: brutal o irracional, de grandeza desmesurada o extraordinario.

[14] Dice el DLE [19]: que tiene soberbia o se deja llevar de ella, grandioso o magnífico.

[15] Dice el DLE [19], aplicado a una persona, según las regiones de América: excitada sexualmente, iracunda o furiosa, valiente o animoso, que tiene suerte, espectacular o sensacional, muy vehemente, muy difícil. El DLE no incluye las dos acepciones de "verraco" pero en la zona del Caribe es algo despreciable, muy grande o malo pero también es un calificativo que expresa admiración.

[16] Todas las lenguas poseen enunciados de este tipo, en francés son de uso cotidiano.

[17] La palabra viene del griego λιτοτης (*litotes*, simplicidad), pero también es una figura de la retórica clásica en la cual se deja entender que el sentido no es tan simple como parece. Es un bello ejemplo de la dialéctica griega.

[18] Esta palabra es un neologismo latino del siglo 5, formado por οξυς (*oxys*, agudo, inteligente) y μωρος (*moros*, tonto, estúpido). "Oxímoron" es un oxímoron.

[19] Las traducciones de los textos que no están en español, me pertenecen.

[20] En las lenguas con influencia latina existen dos palabras derivadas de "*contrarius*" y "*oppositus*". Suelen tener un significado próximo y también algunas diferencias. Una idea básica de la dialéctica es la identidad de estas dos palabras. En alemán Engels

la ley de penetración de los contrarios, ver página 53. Algunas acciones o algunos calificativos poseen aspectos contrarios. El acto sexual puede ser una acto de amor o de odio; la puta es despreciada y deseada simultáneamente; el insulto y el elogio son dos aspectos de la misa actitud; las buenas situaciones (como apresurarse) también pueden ser malas. Las lenguas naturales hacen un uso espontáneo de esta unidad de los contrarios y esto se observa a través de los siglos y las lenguas.

La unidad y lucha de los contrarios

Las conjunciones *adversativas* plantean un desafío lógico formidable. Es frecuente interpretar las conjunciones adversativas como variantes de la función lógica **Y**. Según esta manera de actuar, una expresión del tipo:

> a **pero** b

suele ser interpretada como a **Y** b con el agregado que *se debe advertir especialmente la presencia de* b en el enunciado. Vale la pena destacar que por esta razón existe una cierta asimetría en el papel de los dos elementos, a y b. En muchos casos esta es la interpretación de las conjunciones adversativas, pero no se agota aquí su empleo. Por esta razón presentaremos algunos ejemplos que ilustren nuevas situaciones. Consideremos estos ejemplos:

> Los que aman, odian [21]

En este caso se establece que el amor es inseparable del odio, pero no cabe duda que estos dos enunciados son: “los que aman, [también, **pero**] odian” y “los que odian, [también, **pero**] aman”, el orden parece ser indiferente, dice lo mismo.

La posibilidad de construir enunciados con doble interpretación es otro de los usos de la conjunción **pero**. En el siguiente chiste, citado por Sigmund Freud (1856, 1939), se la emplea con otra función:

[21] y otros autores emplean únicamente “*Gegensatz*” (contrarios). En inglés se suelen emplear las dos palabras según sean los enunciados dialécticos.

[21] Se trata del título de una novela de Adolfo Bioy Casares y Silvina Ocampo (1946).

> Serenísimo recorre sus Estados. Entre la gente que acude a visitarlo, ve un individuo que se le parece extraordinariamente. Le hace acercarse y le pregunta:
>
> –¿Recuerda usted si su madre sirvió en el Palacio alguna vez?
>
> –No, Alteza, responde el interrogado, **pero** sí mi padre. [27]

En este caso la conjunción **pero** cumple una función muy especial. En este fragmento hay dos interpretaciones posibles para el texto y esta doble interpretación está indicada por la conjunción: es posible interpretar que el resultado del parecido sea una casualidad y también es posible interpretar que, contra lo que sugiere el monarca, son parecidos por su padre y no por su madre. Entendemos, y esto se reforzara con otros ejemplos, que aquí la conjunción **pero** expresa una función lógica diferente. Este enunciado, como muchos de los chistes y juegos de palabras, es el equivalente intelectual del cubo de Louis A. Necker (1786, 1861):[22] existe una doble interpretación y no es posible decidir a cual de las dos interpretaciones se hace referencia.

Un segundo ejemplo de Freud muestra otro aspecto del uso de la conjunción **pero**:

> Federico el Grande oyó hablar de un predicador de Silesia que tenía fama de hallarse en trato con los espíritus. Deseoso de averiguar lo que había en tales rumores, hizo acudir a su presencia al predicador y le recibió con la pregunta siguiente:
>
> –¿Puede usted conjurar a los espíritus?
>
> –Sí, Majestad, **pero** nunca acuden. [27]

[22] Se trata de la perspectiva de un cubo transparente que puede interpretarse tanto como visto hacia atrás como hacia adelante. En forma similar se puede dibujar una escalera que puede verse desde arriba o desde abajo. Existen mucho ejemplos de figuras que poseen una doble interpretación y hasta una triple interpretación.

En este ejemplo el resultado también es un chiste, pero de diferente naturaleza lógica. Aquí no aparecen dos interpretaciones sino una contradicción. La respuesta, pasada a términos muy simples dice:

> puedo conjurar a los espíritus **pero** no acuden
>
> puedo conjurar a los espíritus **pero** no puedo conjurar a los espíritus

Con este segundo enunciado se llega a la máxima precisión (pero también se destruye el chiste). La conjunción **pero** permite armar *una contradicción que posee valor de chiste*. También posee esa capacidad de armar una doble interpretación como en el primer ejemplo: permite decir al mismo tiempo que se pueden conjurar a los espíritus y que no se tiene éxito alguno. Este ejemplo es simétrico. Es lo mismo decir "los espíritus no acuden **pero** puedo conjurarlos".

Quien expresa mejor esta función es Sor Juana Inés de la Cruz (1651, 1695) en un singular poema:[23]

> En dos partes dividida
> tengo el alma con confusión:
> una, esclava de la pasión,
> y otra, a la razón medida.
> Guerra civil, encendida,
> aflige el pecho importuna:
> quiere vencer cada una,
> y entre fortunas varias,
> morirán ambas contrarias
> pero vencerá ninguna.

El poema expresa la relación entre la pasión y la razón como una unidad y lucha de contrarios, algo semejante a lo que construye las conjunciones adversativas en el lenguaje cotidiano.

La ilógica del amor

La definición del amor ha sido un tema que ha ocupado a casi todos los poetas. Hay un elemento común en muchos de ellos: la descripción

[23] Este fragmento es una estrofa de "Dime vencedor rapaz".

del estado amoroso como algo contradictorio, difícil de expresar. Esta idea aparece una y otra vez a lo largo de los siglos, al menos desde que se conservan textos escritos.

Posiblemente quien escribió esta idea primero fue el jonio Anakreon (–572?, –485?) en el verso que se le atribuye:

> *I both love and do not love; and am mad and not mad.*[24]

Si bien este caso puede merecer dudas, la poesía de Gaius Catullus (–84?, –54) no ofrece ninguna duda en expresar los sentimientos contrarios que despierta el amor:

> *Odi et amo. Quare id faciam fortasse requiris?*
> *Nescio, sed fieri sentio et excrucior.* [8, Carmen #85][25]

Muchos siglos después un fragmento del célebre poema de Neruda establece la misma idea:

> Ya no la quiero, es cierto, **pero** tal vez la quiero.[26]

Se trata de interpretar el significado desde el punto de vista lógico, porque no cabe ninguna duda que, hasta el momento, a nadie le ha preocupado la "ilógica" de este texto y prácticamente todo el mundo estará de acuerdo que el verso expresa una confusa unión de sentimientos que –sin embargo– resulta fácil de interpretar en forma espontánea. Este verso indica que es simultáneamente válido afirmar "la quiero" y "no la quiero".

Si solamente contáramos con las funciones lógicas binarias nos encontraríamos en un aprieto. La afirmación:

> *no* la quiero **O** la quiero

---

[24] Ambas amo y ya no amo, enloquezco y no enloquezco. Este texto está citado en muchos lugares, pero no aparece ni en la edición de John Addison, London, 1735 (Google Books), ni tampoco en la de Alexandre Machard, Paris, 1884, (Biblioteca Gutenberg).

[25] Odio y amo. ¿Por qué hago esto, tal vez preguntes? No lo sé, pero siento que sucede y me tortura.

[26] Verso del poema 20 de *Veinte poemas de amor y una canción desesperada*, Pablo Neruda.

no presenta ninguna dificultad porque es universalmente válida cualquiera sean los sentimientos del autor. Es claro entonces que para expresar la duda, para expresar que coexisten dos sentimientos contrarios seria más ajustado decir:

no la quiero **Y** la quiero

Esta afirmación es *universalmente falsa*. Por esta razón se emplea la conjunción **pero** que permite armar una contradicción material con significado nuevo. El enunciado paradójico aparece como algo a mitad de camino entre las funciones lógicas **Y** y **O** y por esta razón emplea una conjunción diferente. En rigor **pero** en esta función está a igual distancia de ambas. No es cierto –como suelen afirmar los lingüistas– que **pero** es un *y modificado*. Es una función lógica nueva.

Francesco Petrarca (1304, 1374) escribió un soneto –traducido y plagiado muchas veces a muchas lenguas[27]– que contiene una clásica definición del amor mediante pares de elementos contrarios.

La importancia de este soneto reside en su peculiar estructura: una sucesión de pares contrarios unidos por la conjunción **Y**. El pasaje de una contradicción simple a un conjunto de contradicciones unidas por una conjunción es una estructura nueva que tiene gran importancia en la lógica dialéctica. Por eso justifica presentar completo este soneto. A su vez, la cantidad de traducciones –que no citan a Petrarca– es una afirmación adicional de la importancia de esta estructura nueva que ha descubierto el poeta.

[27] Thomas Wyatt (1503, 1542) –el introductor del soneto en Inglaterra– lo traduce en un soneto titulado "*Description of the Contrarious Passions in a Lover*", ver *The Penguin Book of Sonnets*. Olivier de Magny (1529, 1561) lo tradujo al francés en un soneto que comienza: "*Je cherche paix, et ne trove que guerre*"; también lo han imitado Pierre de Ronsard (1524, 1585) ("*J'espère et crains, je me tais et supplie*"), Luise Labé (1524, 1566), ver *Première Anthologie Vivante de la Poésie du Passé*, Paris, 1951. En portugués existe la versión de José Bonifácio de Andrada e Silva (1827, 1886), Frei José de Salamanca, ver *Os mais belos sonetos que o amor inspirou*, Rio de Janeiro, 1965.

Pace non trovo, et non ò da far guerra, *e temo e spero, e ardo e sono un ghiaccio,* *et volo sopra 'l cielo e giaccio in terra,* *e nulla stringo e tutto 'l mondo abbraccio.*	No encuentro paz, y no hago la guerra, y temo y espero, y ardo y soy un hielo y vuelo sobre el cielo y yazgo en tierra, y nada aprieto y a todo el mundo abrazo.
Tal m'à in pregion, che non m'apre né serra, *né per suo mi riten né scioglie il laccio,* *e non m'ancide Amore, et non mi sferra,* *né mi vuol vivo, né mi trae d'impaccio.*	Tal me aprisiona, que ni me abre ni cierra, ni me retiene ni me suelta el lazo, y no me ata Amor, y no me quita hierros, no me quiere vivo, ni me deja de lado.
Veggio senza occhi e non ò lingua et grido, *et bramo di perir e chieggio aita,* *et ò in odio me stesso, et amo altrui.*	Veo sin ojos y no tengo lengua y grito, y bramo por morir y ruego ayuda, y tengo odio hacia mí, y amo a los otros.
Pascomi di dolor, piangendo rido, *egualmente mi spiace morte e vita:* *in questo stato son, Donna, per vui.* [72, Le Rime, CXXXIV]	Me alimento de dolor, llorando río, igualmente detesto la muerte y la vida: en este estado estoy, Señora, por vos.

Petrarca –y sus imitadores– emplearon pares de ideas contrarias unidas mediante la conjunción **Y**, lo que establece la contradicción. A su vez, las diferentes parejas están unidas mediante comas que reemplazan una cierta función lógica no definida que tanto puede ser **Y** como **O**. En línea con lo analizado antes, también se puede pensar en la función lógica que expresa la conjunción **pero**.

En este tema de la definición del amor se destaca un conocido soneto de Lope de Vega (1562, 1635) que intenta definir al amor –y que a nadie ha sorprendido por ilógico– mediante un texto admirable por su sencillez:[28]

> Desmayarse, atreverse, estar furioso,
> áspero, tierno, liberal, esquivo,
> alentado, mortal, difunto, vivo,
> leal, traidor, cobarde y animoso;
> [. . .]

[28] Soneto de Lope de la Vega citado en múltiples antologías, posiblemente pertenezca a una obra de teatro. Esta versión está tomada de "Clásicos Castellanos", Ediciones de "La Lectura", Madrid, Tomo I, Lope de Vega, Soneto CXXXVI.

esto es amor, quien lo probó lo sabe.

La definición que elabora Lope está formada por una larga lista de elementos contrarios –sin suponer nada sobre lo que quiere decir contrarios– *separados por comas*. El autor emplea comas porque no es sencillo escribir la conjunción –o las conjunciones– que ligan todo este conjunto. A diferencia de Petrarca, solamente en un verso del soneto Lope escribe la conjunción **Y**.

Los signos de puntuación arman parejas de contrarios muy claros. La intención de los autores es elaborar una lista de contradicciones que caracteriza la pasión amorosa. De hecho se emplea en forma reiterada la técnica de las paradojas y se recurre a la coma –o a la conjunción **Y**– para expresar la manera como se arman estas contradicciones. Es interesante observar que, excepto por una cierta posible asimetría, los enunciados de Lope se podrían escribir –si nos olvidamos del número de sílabas del soneto– como:

desmayarse $*$ atreverse

leal $*$ traidor

cobarde $*$ animoso

y así los demás. Con esta notación pretendemos mostrar que existe una clara vinculación entre el uso de una conjunción, representada por $*$, que en el soneto se ha reemplazado por una coma. Sin embargo no pretendemos encontrar, por el momento, la conjunción o la función lógica que esta reemplazada por *las comas que ligan las contradicciones*. Este problema será aclarado más adelante. Por el momento solamente podemos aceptar que esta función lógica plausiblemente es una operación asociativa y conmutativa, tal como exige la interpretación de la definición que intenta hacer el soneto.

Los ejemplos mostrados nos permiten suponer que existen más estructuras lógicas en el cerebro que las consideradas por Russell en la matemática. Éste es nuestro tema de estudio.

El devenir

A diferencia de la penetración de los contrarios –que no tiene una expresión precisa en las lenguas naturales– la noción de devenir tiene una expresión precisa: el verbo *devenir*.[29] A partir de esta base se procede a su análisis. Comencemos primero con algunos ejemplos literarios.

La prédica de Jesús recogida en los Evangelios posee muchos ejemplos de enunciados en devenir. Comencemos por la prédica de Juan el bautista que anuncia la llegada de Jesús:

> [...] todo barranco será rellenado, todo monte y colina será rebajado, lo tortuoso se hará recto y las asperezas serán caminos llanos. [Lc 3:5][30]

Este pasaje contiene cuatro enunciados en devenir donde se anuncia que cada uno de los elementos naturales se convertirá en su contrario. En las bienaventuranzas la estructura lógica también es de contrarios, pero es algo más compleja:[31]

> Bienaventurados los pobres, porque vuestro es el Reino de Dios. Bienaventurados los que tenéis hambre ahora, porque seréis saciados. Bienaventurados los que lloráis ahora, porque reiréis. [...] ¡Ay de vosotros, los que ahora estáis hartos!, porque tendréis hambre. ¡Ay de los que reís ahora!, porque tendréis aflicción y llanto. [Lc 6:20–25]

En este caso hay un par de enunciados contrarios en devenir:

> hambre **deviene** saciedad **pero** saciedad **deviene** hambre
>
> llanto **deviene** risa **pero** risa **deviene** llanto

En este caso, cada situación humana se convierte en su contraria *y recíprocamente*: risa **deviene** llanto **deviene** risa y similares. Esta estructura también se repite en estos otros pasajes:

---

[29] El verbo proviene del latín *devenir*, venir, llegar. En alemán existe el verbo *werden* que es el auxiliar del futuro y también el verbo *devenir*; en inglés se emplea *become* emparentado con el holandés *bekomen*, una palabra germánica.

[30] Todas las referencias de la Biblia están tomadas de [3].

[31] El Evangelio de Lucas contiene la versión más antigua del relato. Así por ejemplo, las bienaventuranzas de Mateo no tienen la precisión lógica de Lucas.

> Y hay últimos que serán primeros, y hay primeros que serán últimos. [Lc 13:30 y también Mt 19:30, Mt 20:16, Mc 10:31]
>
> Porque todo el que se ensalce, será humillado; y el que se humille, será ensalzado. [Lc 14:11 y también Lc 18:14, Mt 20:27, Mt 23:12]

En el Romancero del Cid –poemas anónimos españoles del siglo 11 y siguientes– encontráramos a Doña Jimena que pide de nuevo justicia al rey porque el Cid mató a su padre y de esto da cuenta el romance:

> [. . .] al que mi padre mató
> dámelo para casar,
> que quien tanto mal me hizo
> sé que algún bien me fará.

Se encuentra aquí un ejemplo claro de devenir por contrarios:

> tanto mal (me hizo) **deviene** algún bien (me hará)

Heinrich Heine (1797, 1856) en muchos de sus poemas plantea una lógica dialéctica, ver [38]. El siguiente poema presenta un caso en devenir:

Es liegt der heisse Sommer	El cálido verano se encuentra
Auf deinen Wängelein;	en tus mejillas pequeñas;
Es liegt der Winter, der kalte,	el invierno, el frío, se encuentra
In deinem Herzenchen klein.	en tu pequeño corazón.
Das wird sich bei anders,	Esto todo cambiará,
Du Vielgeliebte mein!	amada mía!
Der Winter wir auf den Wangen,	el invierno estará en tus mejillas
Der Sommer in Herzen sein.	el verano estará en tu corazón.
[43, *Lyrisches Intermezzo*, 48]	

Heine plantea una doble transformación:

verano en mejillas **deviene** invierno en mejillas
invierno en corazón **deviene** verano en corazón

El devenir de la vida invertirá de manera contraria el rostro y el corazón. Richard Wagner (1813, 1883) en su obra *Tristan und Isolde* plantea, en dos pasajes, procesos de devenir del amor:

Des Welternwerdens	del devenir del mundo
Walterin …	reguladora …
in Liebe Wandelnd den Neid	cambias la envidia en amor
[94, II, 1]	

Emplea aqui el vebo devenir (*Werden*) en forma explícita para enunciar: envidia **deviene** amor. En la siguiente escena encontramos esta afirmación que hace Tristán, seguida de la misma afirmación de Isolda:

Tristan du	tú Tristán
ich Isolde	yo Isolda
nicht mehr Tristan	nunca más Tristán
[94, II, 2]	

En este caso se trata de la transfiguración que realiza el amor:

Tristán **deviene** Isolda   Isolda **deviene** Tristán

La sociedad capitalista y, en particular, el dinero es objeto de diversos enunciados en devenir. Comencemos por el conocido poema de Francisco de Quevedo (1580, 1645) sobre el poder del dinero (*La pobreza, el dinero*):

¿Quién hace al tuerto galán
Y prudente al sin consejo?
…
¿Quién hace de piedras pan,
Sin ser el Dios verdadero?
El Dinero.

¿Quién la Montaña derriba

Al Valle; la Hermosa al feo?
...
¿Y quién lo de abajo arriba
Vuelve en el mundo ligero?
El Dinero.

La definición del dinero se realiza mediante una sucesión de proposiciones en devenir tales como: tuerto **deviene** galán, piedras **devienen** pan, abajo **deviene** arriba, y otras.

También Marx en *Das Kapital* suministra un ejemplo directo del devenir como explicaciones del ciclo comercial capitalista.

> *In der Zirkulation $W-G-W$ hat also die Verausgabung des Geldes nichts mit seinem Rückfluß zu schaffen. In $G-W-G$ dagegen ist der Rückfluß des Geldes durch die Art seiner Verausgabung selbst bedingt. Ohne diesen Rückfluß ist die Operation mißglückt oder der Prozeß unterbrochen und noch nicht fertig, weil seine zweite Phase, der den Kauf ergänzende und abschließende Verkauf, fehlt.* [...] *Form dieses Prozesses ist daher $G-W-G'$, wo $G' = G + \Delta G$, d.h. gleich der ursprünglich vorgeschossenen Geldsumme plus einem Inkrement.*[32] [60, I, 4, 1]

Empleando la notación $\rightarrow$ para el devenir, que el texto sugiere, se expresa:

$$\cdots\ W \rightarrow G \rightarrow W' \rightarrow G' \rightarrow \cdots$$

Es un ciclo sin comienzo ni fin, cuya rotación incrementa en cantidad tanto el dinero G (*Geld*) como las mercancías W (*Ware*).

El devenir a través de los contrarios es el mecanismo de estabilidad de algunos sistemas complejos. La estructura de devenir es la manera

[32] En la circulación $W - G - W$ la inversión de dinero no tiene nada que ver con su retorno. Por otra parte, en $G - W - G$, el retorno del dinero se debe a la naturaleza de la inversión. Sin el retorno, la operación fallaría y el proceso se interrumpiría porque falta su segunda fase que es complementaria y es su estado final. [...] La forma de este proceso es, entonces, $G - W - G'$, donde $G' = G + \Delta G$. Esto es, igual a la suma invertida originalmente más un incremento de dinero.

de resolver la contradicción entre dos tendencias que deben coexistir, que son contrarias y que cada una depende de la otra. En la naturaleza, el equilibrio entre depredadores y presas es estable pero oscilante: hay momentos en los que aumenta la población de presas y esto conduce al aumento de depredadores y así sucesivamente. En la sociedad capitalista se observa la alternancia en el poder entre partidos contrarios: los partidos llamados de *derecha* –que favorecen a las empresas y los empresarios– y los partidos llamados de *izquierda* que apoyan las conquistas sociales de los trabajadores asalariados. En la iglesia católica romana se observa la alternancia de los papas: a un papa teólogo –preocupado por la doctrina– sigue un papa pastor, ocupado de fortalecer la fe de los creyentes.

La argumentación en las ciencias

La argumentación es un proceso del razonamiento que no responde fácilmente a la lógica binaria. Consideremos el caso paradigmático de argumentación: el tribunal de justicia. Hay un acusador que presenta sus argumentos y un defensor que presenta los suyos. Cada uno intenta refutar al otro y un juez o un jurado decide. ¿Qué argumentación se ajusta más a la verdad? El mero enunciado de esta pregunta evade a la lógica binaria.

En un proceso de argumentación todas las partes sostienen afirmaciones verdaderas, sin embargo el juez tiene que realizar una valoración. De alguna manera emplea el concepto de "más verdadero que" algo que no existe en la lógica binaria pero sí en el pensamiento humano y en las lógicas modales.

Esto mismo ocurre en las ciencias. Las teorías científicas deben ser argumentadas para convencer a la comunidad científica. Ocasionalmente hay una disputa entre una teoría vieja y aceptada y una teoría nueva y desafiante. La comunidad científica debe entonces evaluar con el criterio de "más verdadero".

A los efectos de ilustrar el problema con un caso histórico real analizaremos la argumentación que presenta Isaac Newton (1642, 1727) sobre la gravitación universal. Sin duda es uno de los más claros ejemplos de argumentación en las ciencias. Newton no solamente revolucionó la matemática, la mecánica, la óptica sino también la epistemología. No nos ocuparemos aquí de las leyes del movimiento, solamente consideraremos la argumentación sobre la gravitación.

Tan consciente era Newton que estaba dando un paso nuevo en la metodología científica –que fundamentaba la gravitación– que en la tercera edición se sintió obligado a agregar una nota al final del libro para aclarar el punto. Allí está el famoso pasaje de los *Principia* "*hypothesis non fingo*" (no hago hipótesis).

> *Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo.*[33] [67, III, *Scholium Generale*]

La presentación del "Sistema del mundo", el libro III, difiere entre la primera (1687) y la tercera edición (1728). En [66, III] comienza con un conjunto de 9 *hipótesis*. En la tercera edición [67, III] en cambio, comienza con 4 *reglas metodológicas* y 6 *fenómenos experimentales*. Sin duda hay un cambio epistemológico en el pensamiento de Newton, a pesar que los dos *contenidos* son prácticamente coincidentes.[34]

El cambio de "hipótesis" por "reglas metodológicas" y "fenómenos experimentales" establece el nacimiento de la ciencia moderna. No se

---

[33] No he sido capaz de deducir de los fenómenos la causa de esta propiedad de la gravitación y no hago hipótesis [sobre esto].

[34] Para abreviar, llamo H a las hipótesis, R a las reglas y F a los fenómenos. H1 equivale a R1 y establece el principio de Okham: no multiplicar las causas. H2 equivale a R2 y establece que los mismos efectos deben obedecer a las mismas causas. H3 equivale a R2, pero Newton en R2 se siente obligado a dar una larga explicación que H3 carece. Esta regla establece que la propiedades experimentales de los cuerpos que se vinculan con la cantidad son universales, como lo es la gravedad. R4 establece la *metodología de la inducción*, excepto si se encuentran casos que no la cumplen y obligan a cambiarla. Es un antecedente de la refutación de Popper. H4 establece que el sistema solar está en reposo, esta afirmación ha desaparecido en la tercera edición. H5 es equivalente a F1 y establece la tercera ley de Kepler para los satélites de Júpiter. F2 establece que los satélites de Saturno cumplen con la tercera ley de Kepler, descubiertos por Cassini entre 1671 y 1684, desconocidos en tiempos de la primera edición. H6 equivale a F3 y establece que los 5 planetas giran alrededor del Sol. H7 equivale a F4 y establece la tercera ley de Kepler para los 5 planetas. En ambos casos presenta las cifras pero F4 tiene más datos. H8 equivale a F5 y establece la primera ley de Kepler para los 5 planetas. H9 equivale a F6 y establece la primera ley de Kepler para la Luna.

trata de enunciar axiomas –hipótesis en la terminología de la primera edición– sino de basarse en experimentos u observaciones reales. Examinemos con más detalle estos "fenómenos experimentales".[35]

Las observaciones astronómicas que menciona Newton en forma explícita son:

- La descripción copernicana del sistema solar: los planetas orbitan alrededor del Sol.
- La primera (K1) ley de Johannes Kepler (1571, 1630) que establece que las áreas recorridas –por la línea desde el astro "centro" al astro "móvil"– son iguales en tiempos iguales.[36]
- La tercera ley de Kepler (K3) que establece que los períodos de las órbitas son proporcionales a la potencia 3/2 de la distancia media del "centro" al "móvil". Esta ley fue observada en tres casos: para todo el sistema solar, para Júpiter y para Saturno.

A partir de K1, mediante los teoremas [66, 67, I, *Theorema* i, ii, ii], Newton muestra que la fuerza que determina las órbitas que cumplen esta ley, son fuerzas dirigidas desde el "móvil" al "centro", ver [66, 67, III, *Theorema* i, ii].[37] A partir de K3, mediante [66, 67, I, *Theorema* iv, *Corol.* vi], demuestra que las fuerzas son inversas al cuadrado de la distancia.[38]

[35] Euklides[23, I] ya había diferenciado tres tipos de afirmaciones: las 23 definiciones, los 5 postulados (axiomas) y las 5 nociones comunes (reglas básicas de la lógica).

[36] La ley fue observada por Kepler para Marte de los registros de Tycho Brahe (1546, 1601) y aceptada por Newton para la Luna porque su movimiento es casi circular.

[37] La sencillez geométrica de la demostración de estos teoremas es simplemente asombrosa, no cabe duda que ésta fue la idea principal de toda la teoría de la gravitación.

[38] El Teorema IV demuestra que las fuerzas centrípetas del *movimiento circular* son proporcionales a los cuadrados de los arcos descritos en la unidad de tiempo divididos por el radio. En lenguaje moderno, la aceleración en un movimiento circular es $\alpha = v^2/R$. El Corolario VI establece que si los períodos de un movimiento circular son proporcionales a la potencia 3/2 del radio y las velocidades inversamente proporcionales a la raíz cuadrada del radio, entonces las fuerzas centrípetas son inversamente proporcionales al cuadrado del radio. En lenguaje moderno, el período de un movimiento circular es $T = 2\pi R/v$, luego de $T = k\, R^{3/2}$ resulta $v = 2\pi/k\, R^{1/2}$ y luego $\alpha = K/R^2$, donde $K = (2\pi/k)^2$ es una constante de proporcionalidad.

Es claro que para la demostración de la ley inversa al cuadrado de la distancia Newton razona con movimientos circulares, ya que las excentricidades de las elipses de las órbitas reales son muy pequeñas. Pero, una vez establecida la ley de gravitación, reconstruye laboriosamente los movimientos elípticos y parabólicos del sistema solar.

Luego de todo esto faltaba algo muy importante: el movimiento de la Luna. De esto se ocupa en [66, 67, III, *Theorema* iii, iv]. En este caso Newton *simplemente* verifica que la aceleración centrípeta de la Luna y la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra también cumplen la ley inversa al cuadrado de la distancia.[39]

La argumentación de Newton era abrumadora: el movimiento circular uniforme cumplía con K1; el sistema solar, los satélites de Júpiter, Saturno y la Tierra cumplían con K3. Completaba, finalmente la argumentación con una demostración teórica de la segunda ley de Kepler (K2) que establecía que el movimiento planetario ocurría en elipses con el Sol en uno de los focos. Una última comprobación fue la reconstrucción de un cometa descubierto por John Flamsteed (1646, 1719). Los *Principia* desterraban la vieja teoría planetaria de Klaudios Ptolemaios (100?, 170?). Sin embargo no existía evidencia experimental directa acerca de la gravitación.

¿Qué valor lógico tenía entonces la gravitación universal? Era una afirmación "verdadera", sin duda, puesto que se relacionaba con afirmaciones "verdaderas" de la matemática y la geometría y con observaciones experimentales. Sin embargo, a los ojos del siglo 20 y del presente, hoy no cabe duda que era una "verdad provisoria", puesto que

[39] Las medidas de diversos astrónomos muestran que la distancia de la Luna a la Tierra es de 60 radios terrestres; su período T es 27 días, 7 horas, 43 minutos, T = 39.343 minutos, y la circunferencia terrestre es $c = 2\pi r = 123{,}2496 \times 10^6$ pies de París (éstas son las cifras que emplea Newton). Luego, la aceleración centrípeta de la Luna es $\alpha = 4\pi^2 \times 60\,r/T^2 = 120\,\pi\,c/T^2 = 120\,\pi \times 123{,}2496 \times 10^6/(39{,}343)^2 \times 10^6 = 120\,\pi \times 123{,}2496/(39{,}343)^2 = 30{,}0$ pies/min^2. Luego, la "caída" de la Luna hacia la Tierra *en un minuto* es $30{,}0\,t^2/2 = 30{,}0/2 = 15{,}0$ pies. Newton calcula 15 1/12 o sea 15,08. La aceleración en la superficie de la tierra, de acuerdo con la ley de gravitación sería 60×60 veces mayor o sea 30,0 pies/seg^2 y de aquí la caída *en un segundo* sería también 15,0 pies. El pie de París es de 326,6 milímetros, luego la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, según los cálculos de Newton, es de $30{,}0 \times 0{,}3266 \approx 9{,}8$ m/seg^2 que coincide con las medidas reales.

la idea de gravitación universal fue superada por la idea de "espacio curvo" de la Relatividad General de Albert Einstein (1879, 1955). En definitiva, ninguna afirmación científica, por consolidada y aceptada que esté, es una "verdad final y absoluta", es solamente algo más verdadero que la teoría anterior, pero es seguramente menos verdadera que otra teoría más elaborada que se desarrolle en el futuro. Nuevamente debemos acudir a la noción de "más verdadero que".

En 1798 Henry Cavendish (1731, 1810) completó un experimento diseñado por el geólogo John Michell: la medida directa de la atracción entre esferas de plomo fijas, de 350 libras, y esferas móviles de 1,6 libras, ver [9]. La medida se hacía mediante la desviación de una balanza de torsión, cuidadosamente aislada para evitar problemas de temperatura, electricidad, magnetismo o corrientes de aire. Encontró así el valor de la constante de gravitación $G = 6{,}754 \times 10^{-11}$ Newton m^2/kg^2, un valor muy próximo al aceptado actualmente.[40]

Contrarios sincrónicos y contrarios diacrónicos

No cualquier pareja de elementos son elementos contrarios.[41] La idea de contrarios se aplica a dos casos diferentes por su relación temporal, si bien los autores clásicos jamás advirtieron esta diferencia.[42] Los contrarios pueden ser

- dos aspectos simultáneos y complementarios de una misma realidad, a los cuales llamaremos *contrarios sincrónicos*;
- dos aspectos sucesivos y opuestos de una misma realidad, a los cuales llamaremos *contrarios diacrónicos*.

---

[40] Es interesante calcular la atracción entre estas esferas de plomo. Las masas son de 160 y 0,7 kilos aproximadamente y actúan a unos 20 cm aproximadamente. La fuerza de atracción es de $G \times 160 \times 0{,}7/0{,}2^2 \approx 1{,}9 \times 10^{-7}$ Newton, del orden de una fracción pequeña de microgramo.

[41] Mao Zedong (1893, 1976) [59] realiza un detallado análisis de la idea de contrarios dialécticos.

[42] Fue Ferdinand de Saussure (1857, 1913) en su *Cours de Linguistique Générale* (1906–1911) [86] uno de los primeros estudiosos –en las ciencias humanas– en advertir esta importante diferencia conceptual.

Esta idea puede ilustrarse con ejemplos sencillos. En la actividad de creación artística podemos identificar dos papeles que no vacilamos en llamar *contrarios*: los creadores y los críticos. La pregunta es: ¿qué tipo de contrarios son los creadores y los críticos? En realidad pueden ser cualquiera de los dos tipos, pero las situaciones creadas son muy diferentes. Lo razonable consiste en suponer que los críticos y los creadores de arte son contrarios *sincrónicos*: dos grupos diferentes de personas, simultáneos, complementarios y ocupados de una misma realidad. Sin embargo también pueden ser contrarios *diacrónicos* y en este caso cada crítico puede también ser un creador que ejerce en forma sucesiva las dos actividades. En este caso nos encontramos frente a una situación indeseable, que puede llevar a la corrupción de la actividad.[43]

Se pueden encontrar muchos contrarios sincrónicos. Lo que sigue es una breve lista:

- Por cada derecho que consagra la ley existe –en forma explícita o implícita– un derecho contrario que lo limita, por ejemplo, la libertad de expresión y la defensa del honor de las personas.
- Para los socialistas clásicos las clases sociales opuestas tienen intereses contrarios y no pueden existir una sin la otra: un propietario de fábrica no puede existir sin obreros y recíprocamente.
- El amor y el odio, a partir de Freud,[44] son considerados contrarios indisolubles, que no pueden existir uno sin el otro.
- La belleza y la fealdad son otro ejemplo de contrarios indisolu-

[43] El mecanismo de corrupción es sencillo y está muy difundido en América Latina. A, actuando como crítico, dice que B es un artista excepcional. A su turno, B actuando como crítico, le devuelve el favor y dice que A también es un artista excepcional. Si críticos y creadores se convierten en contrarios diacrónicos el resultado suele ser la corrupción del arte y de la crítica. Esta misma situación ocurre en la ciencia. Las publicaciones son aceptadas o rechazadas por evaluadores (*reviewers*). Se plantea aquí el mismo dilema: el método de validación es la evaluación por los iguales (*peer review*) con lo cual el rol de autor y el de evaluador se confunden y dan origen a un mecanismo que puede terminar por ser perverso.

[44] En la poesía hay un sinnúmero de ejemplos, anteriores a Freud, en los cuales se establece esta identidad y lucha tal como se ha presentado en el capítulo anterior. El poeta romano Catullus (–84?, –54?) con su *odi et amo* fue uno de los primeros ejemplos.

bles, no puede existir una sin la otra, en permanente unidad.[45]

- Oscar Wilde extiende la idea de contrarios y afirma que toda manifestación artística participa de una contradicción de este tipo: lo contrario de una corriente artística válida también es una corriente artística válida.[46]
- Lo universal y lo particular son contrarios clásicos enunciados por Lev Tolstoi (1826, 1910) como indisolubles[47] y analizados por los filósofos desde tiempos muy remotos.
- En filosofía, el materialismo y el idealismo son dos corrientes contrarias, duales. En materia política se suele identificar a los continuadores de Locke (liberales) y los de Rousseau (reformadores sociales) como corrientes contrarias y duales.
- La mecánica cuántica y la mecánica relativista son dos teorías contrarias, complementarias, aceptadas ambas simultáneamente por los científicos para explicar diferentes aspectos del universo.

Los contrarios diacrónicos aparecen en todo análisis del origen y el movimiento de los fenómenos.[48] Lo que sigue es una breve lista de ejemplos clásicos:

- Qué es primero: ¿el huevo o la gallina? Esta charada clásica pone de manifiesto la existencia de contrarios diacrónicos. El huevo engendra la gallina y la gallina al huevo. Esta interrogante está mal formulada, como mostró Darwin al analizar la evolución de las especies.
- La evolución de la mano y del cerebro humano es otro caso: una engendra al otro en forma sucesiva y reiterada.

[45] El problema de la belleza ha preocupado a poetas y filósofos sin una clara solución. La dificultad se encuentra en esta contradicción indisoluble. Charles Baudelaire (1821, 1687) en *Fleurs du Mal* fue uno de los primeros en mostrar esta identidad.

[46] Esta idea es necesaria también en la política, si bien no se la ha enunciado ni se la acepta explícitamente: lo contrario de una ideología política válida también es una ideología política válida. Esta afirmación tiene interesantes consecuencias.

[47] Una cita –que no he podido localizar con precisión– atribuida a Tolstoi enuncia estos contrarios: *habla de tu aldea y serás universal.*

[48] En estos casos es aplicable un reticulado **rD∞** si bien en este estudio no se entra en los detalles de este reticulado.

- La selección natural se presenta como la sucesión de una mutación seguida de la selección de los más aptos. Este proceso actúa en forma reiterada y sin fin. Los dos casos anteriores son ejemplos de esta idea.
- Las sociedades humanas, tal como sostiene el materialismo histórico, se suceden por contraposición unas de otras.

El hecho que la mano y el cerebro coexistan en el tiempo no cambia su carácter: son contrarios diacrónicos y no sincrónicos.[49] Los contrarios sincrónicos no tienen ninguna vinculación diacrónica: las clases en lucha son superadas ambas por una nueva sociedad.[50]

Aristoteles fue el primer filósofo en descubrir que la única alternativa a la existencia de los contrarios diacrónicos era aceptar la existencia de un dios externo, inmóvil, que sea el responsable del movimiento. Con carácter general, hay solamente dos maneras de comprender el movimiento: como Aristoteles –Dios creó el huevo y la gallina simultáneamente (como contrarios sincrónicos)– o por la acción de contrarios diacrónicos, como Darwin, quien sostiene que este proceso acumula cambios en cantidad que finalmente terminan en un cambio en calidad con la aparición (o desaparición) de nuevas especies.

El aceptar que existen contrarios dialécticos y que son necesarios para la comprensión del devenir, es un principio metodológico muy importante que será empleado en forma reiterada. Por el contrario, la no aceptación de los contrarios conduce a una simplificación y esquematización de la realidad estudiada.[51] En los estudios que siguen en

[49] El considerar que la mano y el cerebro son contrarios sincrónicos conduce a sostener la separación entre el trabajo manual y el trabajo intelectual y otras ideas que conducen a una falsa interpretación. Este ejemplo advierte de los riesgos de la confusión entre los dos tipos de contrarios.

[50] Cuando el *Manifiesto Comunista* [61] afirma que la unidad y lucha de las clases de la sociedad capitalista –la burguesía y el proletariado– será superada por la supremacía del proletariado, convierte contrarios sincrónicos en diacrónicos y comete un error importante que no es del caso analizar aquí.

[51] Un ejemplo clásico está en el enunciado de Jesús: *quien no está conmigo, está contra mí*. Si bien hay diferentes redacciones de este texto, se lo encuentra en los tres evangelios: Mt 12:30; Mc 9:40 y Lc 9:50. Entre estar a favor o en contra de algo hay una multitud de grados, cuando lo que debate son contrarios sincrónicos. Es una simplificación de la realidad no aceptarlo y, en este caso, es el germen de la intolerancia religiosa.

este libro aparecerán muchos ejemplos de contrarios que fundamentan el devenir histórico.

Isomorfismos y homomorfismos

Los enunciados pueden realizarse en diferentes idiomas. Se puede suponer que todos los enunciados dignos de consideración pueden ser traducidos de una lengua a otra, la lengua no debería ser una barrera para expresar el conocimiento.

La operación de traducción sobre un universo de enunciados en español sobre un universo de enunciados en inglés, si todo ocurre como se debe, es un *isomorfismo*.[52] Las estructuras lógicas se preservan y todo se desliza suavemente. En la práctica la situación no es tan sencilla y suelen aparecer dificultades, especialmente con las relaciones *temporales*. Tomemos algunos ejemplos:

x **es** enfermo
x **está** enfermo
x **deviene** enfermo

No es simple la correspondencia de estos enunciados en las diferentes lenguas. El español permite diferenciar claramente enunciados, cosa que no es frecuente en otras lenguas. A pesar de todo puede aceptarse que el cambio de una lengua a otra no es más que un *isomorfismo* –una correspondencia perfecta– sin consecuencias graves para la ciencia de la lógica.

La lógica clásica consiste en asociar –o proyectar– a cada enunciado sobre una estructura formada por dos valores: "verdadero" o "falso". En la medida que reconocemos que hay en la lengua natural estructuras más complejas que la lógica binaria, también debe ser más compleja la estructura sobre la cual se asocia o proyectan los enunciados. Esta estructura matemática se puede identificar con un *reticulado*. En estos capítulos iniciales no entraremos en la noción matemática, simplemente lo consideraremos como una estructura o un diagrama útil para representar ideas.

---

[52] La palabra isomorfismo –igual que homomorfismo y reticulado– posee un significado preciso. En este capítulo y en el siguiente se introducen informalmente las nociones que luego se definen con precisión en el resto del libro.

Es un poco más importante el problema del *homomorfismo* en el universo de los enunciados. Tal como hemos adelantado –cada vez con precisión mayor– la estructura lógica es el resultado de una "correspondencia", "proyección" o "compresión" del universo de los enunciados naturales sobre una estructura abstracta. Esta operación es un *homomorfismo* que por sus características debemos considerar un *homomorfismo universal*. Sobre este tema regresaremos muchas veces.

Metafísica y dialéctica

La interpretación metafísica del universo consiste en establecer un homomorfismo entre la realidad y una estructura elegida en forma más o menos caprichosa. Los planetas, las cuerdas de un instrumento musical, los puntos cardinales, los elementos, todo es posible. Predomina aquí el pensamiento metafísico y no el estudio científico de la realidad.

La lógica nace de la idea de que este homomorfismo debe ser, de alguna manera, irreductible, sin nuevas interpretaciones, final.

Si suponemos que toda interpretación debe ser una interpretación lógica del universo, debemos aceptar que se conservan las operaciones elementales de **Y** y **O** y de allí que se trata de un homomorfismo que conduzca a reticulados. Nace así la idea simple de la lógica, tal cual la concebimos hoy, como la imagen formal del universo.

La lógica es, en definitiva, el resultado de un homomorfismo que conserva las propiedades estructurales del conocimiento.

Las dialécticas naturales

Lógica y dialéctica

Un estudio experimental de la lógica humana revela un panorama que posee una sorprendente amplitud. Aun dejando de lado las formas "genéticas" de desarrollo del pensamiento humano o las formas que pueden tipificarse como "patológicas", queda todavía un enorme campo a explorar. Este campo se extiende desde las formas empleadas por filósofos del pasado –los creadores de los Upanishads, Lǎo Zǐ (Lao Tsé), los presocráticos, especialmente Erakleitos, y otros– hasta la dialéctica de Georg W. F. Hegel (1770, 1831), Friedrich Engels (1820, 1895) y Karl Marx (1818, 1883) en los tiempos modernos. Genéricamente llamaremos dialéctica a todo el pensamiento formalizado y ordenado de los seres humanos.

La lógica, desde Aristoteles a nuestros días, se presenta como natural. En este hecho incide la tradición cultural, la educación, pero, por encima de todos estos hechos, *es natural porque fue impuesta al cerebro humano por la evolución de las especies*.

Si se intenta fundamentar la validez de la lógica de Aristoteles se pueden dar cuatro argumentos poderosos que afirman su carácter natural y su aplicación universal a la ciencia.

El primer argumento es *histórico*. La existencia de los *Elementos* de Euklides, escritos 22 siglos atrás, nos muestra que las estructuras lógicas, por lo menos en los últimos miles de años, no han cambiado. La continuidad histórica del pensamiento formal, que se pierde en el Egipto clásico, es un primer y fundamental argumento.

Las lenguas modernas pueden expresar cualquier estructura lógica booleana. *Este hecho ha ocurrido sin la intervención de los lógicos académicos*, es un hecho natural y constituye un segundo y formidable argumento. Esto ha sido analizado en capítulos anteriores.

Sobre el funcionamiento del cerebro humano se conoce bien poco, sin embargo, dentro de lo conocido, ya se han podido encontrar *conexiones neuronales que arman circuitos lógicos binarios elementales* y también este es un hecho natural. Éste es un tercer argumento.

El cuarto argumento es de carácter científico. La astronomía de los calendarios agrícolas empleó, en el pasado histórico, la matemática en forma profusa. Con Euklides y otros científicos alejandrinos, la geometría se convirtió en una rama de la matemática deductiva. Con Galilei y Newton, la física se convirtió en una ciencia matemática. Con Lavoisier la química siguió el mismo camino. En el siglo presente, con la genética molecular, la biología sigue el camino de la formalización. Este proceso muestra que la herramienta fundamental para el análisis de la materia es la lógica y éste es un formidable argumento.

Para estudiar la lógica dialéctica debemos seguir un camino similar. La dialéctica se debe buscar en aquellos puntos, en los intersticios donde se quebranta el pensamiento lógico binario y donde se identifica un área que no es analizable en los términos lógicos tradicionales. Por esta razón, las fuentes de la dialéctica se encuentran en las mismas fuentes de la lógica tradicional.

En ese capítulo mostraremos que la dialéctica es una actividad *natural* del pensamiento humano. Si esto es así, a la dialéctica debe ser aplicable el argumento de la evolución de las especies y debe también haber incidido por igual en los circuitos cerebrales. Así es que el cerebro –humano o animal– debe poseer una actividad dialéctica que le es útil para su relación con la naturaleza, así como la capacidad analítica lo es. En forma análoga, debe existir una lógica dialéctica escondida en el pensamiento histórico, en las estructuras lingüísticas y en las ciencias.

La búsqueda de la dialéctica se convierte entonces en la búsqueda de lo *no–lógico*, la búsqueda de las fallas y fisuras del aparentemente monolítico planteo de la lógica tradicional.

La dialéctica *yin–yang*

En la filosofía tradicional china, sin referencia a ningún autor en particular, es frecuente encontrar la clasificación de todos los elementos del universo, desde los alimentos hasta las actitudes del hombre en dos categorías. Las palabras *yin* y *yang* designan el objetivo final del homomorfismo estructural del pensamiento chino tradicional:

> [...] *les notions secondes de yin et de yang deviennent des entités scolastiques que la spéculation utilise pour ordonner les faits. Le yin et le yang cessent d'être des principes concrets ; pourtant l'orientation dualiste qu'ils ont donnée à la pensée est un fait acquis. Ni le yin ni le yang ne deviendront par eux-mêmes des réalités religieuses, mais un parti pris de classification bipartite continuera à dominer le monde des choses sacrées : l'âme restera double* [...][53] [30]

La dialéctica de Lǎo Zǐ es muy simple y se basa en la organización binaria de los contrarios *yin* y *yang* de la tradición filosófica china.[54] Desde el comienzo leemos:

> [...] la existencia y la no–existencia dan nacimiento una a la otra; la dificultad y la sencillez producen una a la otra; largo y corto, una da idea de la otra; altura y pequeñez nacen del contraste de una con la otra; las notas musicales y los tonos son armoniosos unos en relación con los otros [...] [53, II]

No se necesita especular mucho para ver aquí la "unidad y lucha de los contrarios" que siglos después emplearían Hegel, Marx y Engels.

Tal vez la principal duda que tenga un lector familiarizado con la lógica y con el pensamiento chino consiste en aceptar que estas ideas pueden ser consideradas *valores lógicos* y no como "entidades metafísicas" sobre las que no hay nada que explicar. Esta duda aparecerá más de una vez en las secciones siguientes, pero postergaremos su análisis hasta disponer de todos los elementos necesarios.

---

[53] [...] las nociones secundarias de yin y yang se transforman en entidades escolásticas que la especulación emplea para ordenar los hechos. El yin y el yang dejan de ser principios concretos, pero la orientación dualista que dieron al pensamiento fue un hecho consumado. Ni el yin ni el yang se convertirán en realidades religiosas, pero la clasificación bipartita continuará dominando el mundo de las cosas sagradas: el alma continuará doble [...].

[54] En el capítulo 42 Lǎo Zǐ menciona indirectamente a los principios contrarios *yin–yang*. Zhuāng Zǐ , en cambio, los menciona reiteradamente en forma explícita.

Quien puede ilustrar mejor el significado de los dos valores lógicos es Arnold J. Toynbee (1889, 1975), puesto que las nociones de *yin* y de *yang* son pilares fundamentales en su análisis del movimiento histórico. En estos fragmentos seleccionados del compendio de su obra –un compendio del compendio de Somervell– encontramos:

> This alternating rhythm of static and dynamic, of movement and pause and movement [...] the sages of the Sinic Society described these alternations in terms of Yin and Yang [...] In every case the story opens with a perfect state of Yin. [...] When Yin is thus complete, it is ready to pass over into Yang. [...] History duly reveals to us in the phenomena of disintegration a movement than runs through war to peace; through Yang to Yin; [...] The work of the Spirit of the Earth [...] manifest itself in the geneses and growths and breakdowns and disintegration of human societies [...] we can hear the beat of an elemental rhythm whose variations we have learn to know as challenge-and-response, withdrawal-and-return, rout-and-rally, apparentation-and-affiliation, schism-and-palingenesia. This elemental rhythm is the alternating beat or Yin and Yang [...] the movement that this rhythm beats out is neither the fluctuation of an indecisive battle nor the cycle of a treadmill. The perpetual turning of a wheel is not a vain repetition if, at each revolution, it is carrying the the vehicle that much nearer to its goal; [...] On this showing the music that the rhythm of Yin and Yang beats out is the song of creation [...] If we listen well we shall perceive that, when the two notes collide, they produce not a discord but a harmony. Creation would not be creative if it not swallow up all things in itself, including its own opposite. [91][55]

[55] Este movimiento alterno de lo estático y lo dinámico, de movimiento, de pausa y de movimiento [...] los sabios de la Sociedad Sínica describieron estas alternativas en términos de Yin y Yang [...] En todos los casos la historia se abre en un estado perfecto de Yin [...] Cuando Yin esta así completo se halla dispuesto para convertirse en Yang.

Para Toynbee el *yin* y *yang* no son solamente una metáfora sino un pensamiento organizado. A lo largo de los tomos del *Estudio de la Historia* [90] recurre a estos conceptos una y otra vez –como un estudioso chino lo haría– para interpretar el *movimiento* de la historia. En estos fragmentos citados se puede encontrar la marca inconfundible de una *dialéctica yin–yang* que explica el movimiento. Existe la idea de contrarios, existe la idea de girar sobre sí mismo, existe la idea de progreso en cada giro.

Veamos con más detalle la lógica de Toynbee. Toynbee afirma –y el contexto siempre lo confirma– que cada una de las proposiciones históricas o bien son *yin* o bien son *yang*. Esto es consecuencia de que cada momento histórico puede ser clasificado como *estático* o como *dinámico*. Para Toynbee la sociedad posee estados y de allí que estos estados se trasladen a las afirmaciones sobre la historia. Éste es un punto delicado en nuestro estudio. Consideremos una afirmación histórica. Según Toynbee esta afirmación será válida en un determinado contexto y en un período *yin* o *yang* según sea el caso. Las verdades históricas no aparecen como verdades universales, sino que aparecen como verdades válidas en un lapso histórico solamente. A la afirmación *yin* sucede la afirmación *yang* y recíprocamente. El comportamiento de la realidad obliga a un comportamiento de la lógica empleada para estudiarlo.

La transformación del *yin* y el *yang* entre sí, el llamado *compás alternativo* o *canto de la creación* no es otra cosa que una función de la

---

[. . .] La historia nos revela oportunamente que el fenómeno de la desintegración, un movimiento que va de la guerra a la paz: de Yang a Yin [. . .] La obra del Espíritu de la Tierra [. . .] se manifiesta en las génesis, crecimientos y colapsos y desintegraciones de las sociedades humanas [. . .] podemos oír el compás de un ritmo elemental cuyas variaciones hemos llegado a conocer como incitación–y–respuesta, retiro–y–retorno, derrota–y–recuperación, paternidad–y–filiación, cisma–y–palingenesia. Este ritmo elemental es el compás alternativo de Yin y Yang [. . .] El movimiento que este ritmo marca no es ni la fluctuación de una batalla ni el ciclo de una noria. El girar perpetuo de una rueda no es una vana repetición si en cada revolución lleva el vehículo cada vez más cerca de su meta [. . .] Según esto, la música que marca el ritmo de Yin y Yang es el canto de la creación. [. . .] Si atendemos bien, percibiremos que, cuando las dos notas chocan, no producen una disonancia sino una armonía. La creación no sería creadora si no absorbiera todas las cosas, incluso las que son contrarias a ella. [La cita esta armada con fragmentos tomados de [92] [II, iv, 2], [II, v, 1], [V, xvii, 2] y [V, xxii].]

lógica que los materialistas han llamado negación. La negación aparece como el mecanismo del movimiento y como un proceso básico del curso de la historia. También este es un estrecho punto de contacto con el devenir de la dialéctica materialista. La idea se expresa –empleando el símbolo $\rightarrow$ para indicar el devenir– como:

$$\cdots \rightarrow yin \rightarrow yang \rightarrow yin \rightarrow yang \rightarrow \cdots$$

El ejemplo más simple, más directo y más estimulante para interpretar la dialéctica *yin-yang* lo presentó Oscar Wilde (1854, 1900) en un ensayo sobre el arte:

> *For in art there is no such thing as a universal truth. A truth in art is that whose contradictory is also true.*[56] [95]

Es difícil encontrar, en una forma tan compacta, tantas ideas lógicas y de tanto contenido. Por supuesto que también podemos ver en esta afirmación solamente una muestra del ingenio de Wilde, pero intentaremos ver mucho más. Supongamos que la afirmación se puede tomar en su sentido literal estricto. Resulta entonces que existen, por lo menos, tres tipos de valores lógicos:

- verdades universales, mencionadas a texto expreso;
- falsedades (universales), por contraposición;
- verdades en el Arte, mencionadas a texto expreso.[57]

Se desprende del pasaje que existe asociado un concepto de negación que vincula los grupos de valores lógicos. En la Figura 1 se presenta un diagrama donde se interpretan todos estos hechos.

[56] En el Arte no hay nada semejante a una verdad universal. Una verdad en el Arte es aquella que su contradictoria también es verdadera.

[57] En un epigrama Wilde sugiere el antagonismo entre la literatura realista y la romántica: *Al siglo 19 no le gusta el realismo. Es la rabia de Calibán de verse en el espejo. Al siglo 19 no le gusta el romanticismo. Es la rabia de Calibán por no verse en el espejo.* Nada más claro que el enunciado de esta contradicción. Hoy podríamos agregar a estas dos, muchas otras corrientes literarias contradictorias entre sí: el realismo socialista, el realismo mágico, la literatura histórica, la ucronía, la literatura ergódica y otras que no menciono o que todavía no han aparecido.

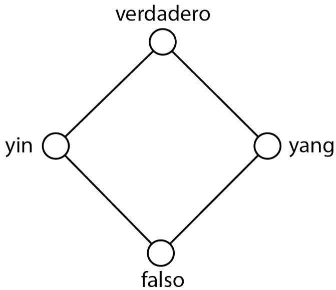


Figura 1: Reticulado de la dialéctica *yin–yang*.

En el diagrama (reticulado en su sentido matemático) se designan los valores lógicos nuevos de Wilde como *yin* y *yang*. Estos nombres –que usamos en forma provisoria y que más adelante se abandonan– están tomados de la filosofía tradicional china y su elección se justificara en lo que sigue.[58] La noción de *negación* que introduce Wilde y la operación de *negación* –el "cántico de la creación" según Toynbee– se pueden expresar, designando con 1 y 0 a lo *verdadero* y lo *falso* respectivamente, como:

$$N = (0\ 1)(yin\ yang)$$

donde uso aquí –como en el resto del libro– la notación de sustituciones habitual en la teoría de grupos.[59] Esto quiere decir que la negación N transforma 0 en 1 y recíprocamente, *yin* en *yang* y recíprocamente.

La afirmación original de Wilde adquiere en este contexto una gran precisión lógica y no puede ser considerada como una simple frase de ingenio. Aparte de las verdades y falsedades universales que se aplican, por ejemplo, a la matemática, a la ciencia o a la técnica, las afirmaciones acerca del arte tiene otra suerte. Excepto el caso de afirmaciones que pueden ser trivialmente verdaderas o falsas, todas las demás afirmaciones posee un valor lógico diferente. El enunciado de Wilde citado se puede reformular en términos precisos como:

Toda afirmación no trivial sobre el arte posee valor lógico

[58] Este reticulado es bien conocido y coincide con el reticulado booleano de orden 2 que se designa como $\mathbf{B}^2$ –en la notación que se propone en este estudio– o con el reticulado **D2** que será definido posteriormente.

[59] Esta notación de describe más adelante, ver página 108.

yin o *yang* y de allí que la negación de toda afirmación, sea una afirmación igualmente válida.

En lo expuesto, se entiende que los valores lógicos *yin* y *yang* son valores que indican verdad y no falsedad, si bien puede ser una verdad *parcial* o *limitada*. Como éste es el primer ejemplo de afirmación que no toma los valores lógicos tradicionales, se justifica abundar en el punto. A titulo de ejemplo consideremos las dos afirmaciones:

- el arte refleja la realidad,
- el arte crea una realidad nueva.

La mayoría de las personas estarán de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

- Estas afirmaciones son –en algún sentido– contrarias.
- Estas afirmaciones no son –en forma absoluta– ni universalmente verdaderas ni universalmente falsas; en todo caso no es sencillo establecer claramente su valor lógico.
- La primera afirmación posee un tono materialista y la segunda un tono idealista.

Por el contrario, es poco probable que exista acuerdo acerca de las siguientes afirmaciones:

- La primera afirmación es *yin* y la segunda es *yang*.
- La primera afirmación es marcadamente "masculina" en tanto que la segunda es marcadamente "femenina".
- La primera afirmación es marcadamente "estática" en tanto que la segunda es marcadamente "dinámica".
- Ninguna de las dos afirmaciones posee algo de verdad, deben ser consideradas enteramente falsas por igual.
- Lo opuesto de las precedentes afirmaciones.

La respuesta a estas posibilidades será analizada luego de presentar más materiales de la dialéctica *yin–yang*. Estas consideraciones nos muestran que el cerebro humano puede trabajar con valores lógicos diferentes de “verdadero” o “falso” y que estos conceptos son aplicables al universo y poseen interés real. A efectos de establecer con mayor firmeza este punto, abundaremos en ejemplos de dialéctica *yin–yang*.

Las agudezas de Wilde, el pensamiento escolástico chino o el estudio de la historia de Toynbee no son los únicos ejemplos históricos de dialéctica *yin–yang*. También la teoría sexual de Freud es otro ejemplo sumamente interesante de esta estructura lógica:

> Sadismo y masoquismo ocupan entre las perversiones un lugar particular, dado que la antítesis de actividad y pasividad que constituye su fundamento pertenece a los caracteres generales de la vida sexual [...] sus dos formas, activa y pasiva, aparecen siempre conjuntamente en la misma persona [...] Vemos así aparecer regularmente determinadas tendencias perversas como pares contradictorios, hecho cuya alta importancia teórica veremos más adelante [...] Cuando se descubre en lo inconsciente uno de estos instintos, apto para formar con su contrario uno de los pares que hemos hablado, aparece siempre actuando simultáneamente dicho instinto antitético. Toda perversión ‘activa’ queda así acompañada siempre en estos casos del factor antagónico correspondiente [...] [26]

Los *pares contradictorios*, según palabras textuales de Freud, conducen rápidamente a valores lógicos para los enunciados sobre la conducta humana. Se pueden diferenciar cuatro valores lógicos diferentes:[60]

- afirmaciones universalmente válidas,
- afirmaciones válidas para el inconsciente,
- afirmaciones válidas para el consciente.

[60] En rigor, el análisis posterior de Freud lo llevó a considerar que había en el inconsciente dos entidades en pugna: el *Super–ego* y el *Id*. Hay aquí un esbozo de la dialéctica de Hegel, si bien no fue considerada así por el autor.

- afirmaciones falsas.

Estos cuatro valores, unidos a la condición de pares contradictorios, conduce a una dialéctica *yin–yang*. Dentro de este pensamiento, la *negación* posee un papel primordial. El proceso por el cual una afirmación del consciente pasa al inconsciente es una *negación*. También es una *negación* la operación que realiza el cambio inverso. El primer proceso se vincula con la "génesis de las neurosis", el segundo, con la "terapia". Como es bien conocido, la labor del analista –según Freud– consiste en convertir las verdades del *inconsciente* en verdades del *consciente*. En nuestro lenguaje lógico, la operación que se realiza es también una negación. Hasta resulta expresivo declarar que "la negación de las actitudes conscientes forman las neurosis" en tanto que "la terapia consiste en la negación del contenido inconsciente".[61]

En los casos que hemos presentado, la dialéctica *yin–yang* aparece en forma espontánea. No existe ningún intento por parte de los autores citados, ni siquiera la sospecha, de que se esté en presencia de un mecanismo de razonamiento nuevo. En todos los casos esta nueva forma de razonar se presenta como una dialéctica y no como una lógica booleana, a pesar de que formalmente coincidan.[62] El manejo de la contradicción y de la negación lo muestra. Pero por encima de esto, hay una razón más poderosa para saber que no se está en presencia de una lógica booleana derivada de combinaciones de lógicas binarias. La conversión entre $\mathbf{B}^2$ y $\mathbf{B}$ se puede realizar con el mecanismo de introducir o eliminar variables ficticias. En ninguno de estos casos se sugiere este procedimiento. No se puede decir que exista una variable binaria oculta que permita separar las verdades contradictorias en el arte, en la historia o en el inconsciente. La introducción de variables ficticias sería una forma de "salvar las apariencias" al estilo escolástico o de crear una lógica "convencional" como le hubiera gustado decir a Henri Poincaré.

A efectos de complementar lo dicho, son interesantes dos citas de los clásicos del materialismo dialéctico que se vinculan directamente

[61] Es de esperar que esta manera de presentar viejos resultados no inaugure una nueva escuela psicoanalítica.

[62] Esta afirmación es muy delicada y se aclara en lo que sigue. En los hechos la dialéctica *yin–yang* es homomorfa a la lógica binaria.

con la dialéctica *yin–yang*. Comencemos por el enunciado –impreciso[63]– que formula Engels acerca de una de las leyes de la dialéctica:

> *Alle Naturvorgänge sind doppelseitig* [...] [21, Artikel, Grundformen der Bewegung][64]

Si entendemos que la afirmación es de carácter general y que se puede aplicar dialéctica **D2**, este enunciado traduce los resultados que hemos encontrado y habla de una simetría de "las dos caras".

La segunda cita pertenece a Lenin –Vladimir Ilich Ulianov– (1870, 1924) y toca un punto interesante. Por la naturaleza de la cita puede ocurrir que los lectores familiarizados con el materialismo histórico se sientan un poco desconcertados, pero en el curso de este trabajo la interpretación adquirirá una precisión cada vez mayor. Dice Lenin:

> [...] no es posible dejar de ver [...] la lucha de los partidos en filosofía, lucha que en definitiva expresa las tendencias y la ideología de las clases enemigas en la sociedad contemporánea [...] [como la lucha del] materialismo y el idealismo. [55]

Esta manera de estudiar la filosofía se asemeja a una dialéctica *yin–yang*. En este caso se puede afirmar que toda tesis filosófica no es una verdad universal sino que posee uno de los dos valores lógicos: *materialismo* o *idealismo*. Usando la terminología de Wilde, lo contrario de una afirmación filosófica válida, es también una afirmación filosófica válida. Una posee carácter idealista y la contraria posee carácter materialista. En el plano de un pensamiento dialéctico es posible comprender esta dualidad y contemplarla desde un punto de vista más general.

Podemos ahora regresar a estos valores lógicos *yin* y *yang*. Según el pensamiento chino, la interpretación de Toynbee de la historia se puede asociar:

yin = lo estático, lo pasivo, lo femenino,

yang = lo dinámico, lo activo, lo masculino.

---

63 Más adelante se regresa a esta cita.

64 Todos los procesos de la naturaleza tienen dos caras. [21, Artículos, Fundamentos del movimiento]

Sin embargo, hay buenas razones para no aceptar este tipo de identificaciones. En primer lugar, existe una simetría total en el reticulado **D2** que choca con la posibilidad de diferenciar en forma real el valor *yin* del *yang*. En segundo lugar, no posee mayor sentido intentar calificar los valores lógicos sino por características formales. En tercer lugar, rápidamente nos internamos en problemas. Consideremos el caso de Freud como ejemplo: no solamente se encuentra *lo estático* y *lo dinámico* sino que también se encuentra *el consciente* y *el inconsciente* y no nos es posible identificar con un valor o con el otro. Por estas razones no podemos aceptar que exista un significado *interno e inmutable* de los valores de esta dialéctica. En forma opuesta, aceptamos que estos valores son indistinguibles *desde el punto de vista formal*.

Si aceptamos que no posee sentido intentar dotar de significado absoluto a los valores *yin* y *yang*, podemos repasar las principales ideas de esta lógica. En este reticulado existen dos negaciones:

$$N_1 = (0\ 1) \qquad N_2 = (0\ 1)(yin\ yang)$$

De esta manera se indica que mediante una negación 0 se transforma en 1 y recíprocamente, así como se indica que *yin* se transforma en *yang* y éste en *yin*. Cada lista encerrada en un paréntesis indica un ciclo cerrado. Si algún elemento no aparece, significa que es transformado en sí mismo por la operación.

A esta altura del análisis, se emplea la noción de negación en una forma espontánea, sin mayor análisis crítico. Más adelante se realizará una exposición ordenada sobre este importante punto.

La primera negación, N_1, no afecta los valores *yin* y *yang*, solamente intercambia los valores extremos del reticulado. La segunda negación, N_2, coincide con la negación habitual en $\mathbf{B}^2$. La principal diferencia entre la lógica booleana $\mathbf{B}^2$ en su interpretación tradicional y la lógica dialéctica **D2** *es la existencia de dos negaciones en lugar de una única*. Los dos diagramas son idénticos.

Desde el punto de vista de sus aplicaciones, las afirmaciones se dividen en dos tipos principales: las afirmaciones *universales* (verdaderas o falsas) y las afirmaciones *dialécticas*. Pertenecen al primer tipo, en todos los contextos analizados, las afirmaciones de la matemática o de la lógica, que son valores formales puros. Pertenecen al segundo tipo, según los ejemplos analizados, las afirmaciones del arte, de la historia, de la conducta psicológica o de la filosofía. En el capítulo final se verá que también los valores dialécticos existen en las ciencias naturales. Las operaciones de negación poseen diferente significado según el campo que se considere, pero siempre la negación esta asociada a una forma de cambio o de acción.

Nos hemos detenido bastante en esta forma rudimentaria de dialéctica porque permite aclarar muchas de las ideas que se manejan en este estudio. Pero lejos de quedar agotado el tema, con los planteos de esta sección recién se comienza a analizar el problema de los fundamentos de la dialéctica.

La dialéctica de Vico y de Hegel

En las ciencias sociales también se ha introducido una idea dialéctica. Comencemos por uno de los precursores en estos temas.

Giambattista Vico (1668, 1744) es autor de un largo ensayo sobre la historia humana, *La scienza nuova* de 1725 [93], donde presenta una argumentación sobre la existencia de leyes sobre la historia y su interpretación cíclica: *teoria dei corsi e dei ricorsi storici* (teoría de los avances y retrocesos históricos). La historia humana comprende la repetición cíclica de tres estados: *l'età degli dei* (la edad de los dioses), *l'età degli eroi* (la edad de los héroes), *l'età degli uomini* (la edad de los hombres). En la primera edad, la sociedad es teológica; en la segunda, es aristocrática; en la tercera es una sociedad de iguales. No cabe duda que en Vico están claramente establecidos tres principios sobre la historia, una "ciencia nueva" como titula a su obra:

- la historia posee leyes como la ciencia;
- el devenir de la historia es cíclico;
- comprende tres etapas.

No se puede dejar de ver aquí un comienzo del materialismo dialéctico que posteriormente desarrolló Hegel.[65]

[65] Hay otras propuestas sobre este punto. Auguste Comte (1798, 1857) establecía en

La dialéctica de Hegel es el primer ejemplo de lógica no binaria que fue enunciado como tal. Puesto que se trata del caso más importante de dialéctica, en la presente sección solamente presentaremos una introducción al tema. Todo el trabajo gira alrededor de esta dialéctica y de su generalización, de modo que se regresará permanentemente al problema de su interpretación.

Hegel fue el primer lógico que planteó la necesidad de tres valores lógicos adicionales, aparte de *verdadero* y *falso*. Estos tres valores lógicos fueron presentado originalmente por Hegel como instancias del conocimiento. Posteriormente los materialistas dialécticos alemanes –Marx y Engels, ver [21, 22, 62]– extendieron su alcance a leyes que describían instancias del movimiento de la materia. Son, como es bien conocido:[66]

tesis = punto de partida

antítesis = negación del anterior

síntesis = negación del anterior y punto de llegada

En la Figura 2 se presenta el diagrama correspondiente a la dialéctica de Hegel.

[14] tres etapas en el desarrollo de la filosofía: *d'abord la méthode théologique, ensuite la méthode métaphysique, et enfin la méthode positive* (primero el método teológico, luego el método metafísico y finalmente el método positivo). In Lewis H. Morgan (1876, 1950) definía en [65] 10 etapas en la evolución de la sociedad humana.

[66] En rigor la filosofía tradicional china ya había advertido la existencia de tres valores. Esto es manifiesto en el uso que se da del *yin–yang* a la alimentación. Todos los alimentos se clasifican entre la categoría *yin* o *yang*. Sin embargo resultó evidente que era necesario agregar una tercera categoría los alimentos *neutros*, que no eran ni una cosa ni la otra. El ejemplo más claro ocurre con los tipos de té: existe el té verde, simplemente hojas secas; existe el té negro, de hojas fermentadas; pero existe un tercer tipo de té, el té azul o *wulong*, que está parcialmente fermentado y parcialmente seco. Esta idea se extendió a todos los alimentos. Es interesante observar que algunos tratadistas chinos clásicos observaron una ausencia en la dupla *yin–yang* y así es que se encuentra con cierta frecuencia la terna *yin–yang–dao*. Sin duda este es uno de los más claros anticipos de la lógica hegeliana. La filosofía tradicional de la India también descubrió una forma embrionaria de esta dialéctica ternaria. La tríada Brahma, Shiva y Vishnú expresa un triple aspecto de la dinámica del universo: la *creación*, la *destrucción* y la *conservación*. Esta estructura de tríadas no llegó al nivel de abstracción del pensamiento chino o del occidental, pero expresa (en una forma exuberante) esta triple idea.

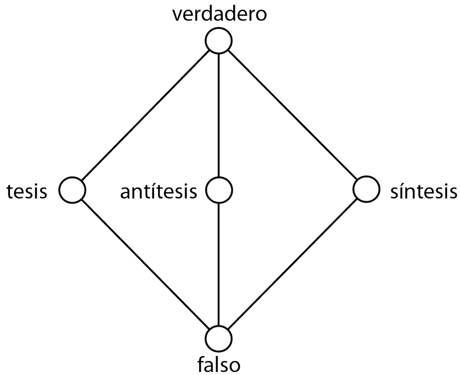


Figura 2: Reticulado **D3** de la dialéctica hegeliana.

La dialéctica materialista

Friedrich Engels se ocupó varias veces de las leyes de Hegel en su interpretación materialista. La realidad del universo exige que, además de estudiar la materia, se estudie también el movimiento de la materia en forma científica. Si suponemos, tal como ha ocurrido hasta hoy, que la lógica binaria (o lógica aristotélica o clásica como diremos muchas veces) es el reflejo de las leyes generales de la materia, la lógica dialéctica corresponderá a las leyes generales del movimiento de la materia.

> *Es ist also die Geschichte der Natur wie der menschlichen Gesellschaft, aus der die Gesetze der Dialektik abstrahiert werden. Sie sind eben nichts andres als die allgemeinsten Gesetze dieser beiden Phasen der geschichtlichen Entwicklung sowie des Denkens selbst. Und zwar reduzieren sie sich der Hauptsache nach auf drei: das Gesetz des Umschlagens von Quantität in Qualität und umgekehrt; das Gesetz von der Durchdringung der Gegensätze; das Gesetz von der Negation der Negation. Alle drei sind von Hegel in seiner idealistischen Weise als bloße* Denkgesetze *entwickelt* […] *Der Fehler liegt darin, daß diese Gesetze als Denkgesetze der Natur und Geschichte aufoktroyiert, nicht aus ihnen abgeleitet werden.* [21, Artikel, Dialektik][67]

[67] Las leyes de la dialéctica se abstraen, por tanto, de la historia de la naturaleza y de la

Lamentablemente el texto de Engels solamente analiza en forma directa la primera ley: la ley del cambio de la cantidad en la calidad. La ley establece que la causa de los cambios es la acumulación de la cantidad. No se trata de una ley formal sino material, por esta razón se reflejará en este trabajo solamente en forma indirecta. En la sección siguiente se analiza este punto.

La segunda ley, la ley de penetración de los contrarios establece:

> *Alle Naturvorgänge sind doppelseitig, beruhen auf dem Verhältnis von mindestens zwei wirkenden Teilen, auf Aktion und Reaktion.* [21, Artikel, Grundformen der Bewegung][68]

Esto es todo. El análisis de la realidad lleva a dos aspectos que se presentan como diferentes, opuestos, contrarios, los dos polos entre los cuales se desenvuelve el movimiento. La búsqueda de estos contrarios no es una tarea sencilla ni puede ser manejada a la ligera.

La tercera ley de la dialéctica, sin duda la más fecunda desde el punto de vista formal, establece que el juego de contrarios regresa permanentemente a situaciones por las cuales se ha pasado, pero en un forma enriquecida, aumentada. El movimiento tiene tres fases consecutivas: punto de partida, negación del punto de partida y regreso al punto de partida: negación de la negación. La tercera ley de la dialéctica regula la causa de los movimientos. Su enunciado en devenir es:

$$\text{tesis} \rightarrow \text{antítesis} \rightarrow \text{síntesis}$$

En la exposición de Engels [21] –un borrador sin terminar– no aparece en forma directa este enunciado, pero sí es empleado, por ejemplo, en *Das Kapital* [60] y también por Hegel [42].

---

historia de la sociedad humana. Dichas leyes no son, en efecto, otra cosa que las leyes más generales de estas dos fases del desarrollo histórico y del mismo pensamiento. Y se reduce, en lo fundamental, a tres: ley del trueque de la cantidad en cualidad y viceversa; ley de la penetration de los contrarios; ley de la negación de la negación. Las tres leyes han sido desarrolladas por Hegel, en su manera idealista, como simples leyes del pensamiento [. . .] El error reside en que estas leyes son impuestas, como leyes del pensamiento, a la naturaleza y a la historia en vez de derivarlas de ellas. [21, Artículos, Dialéctica]

[68] Todos los procesos de la naturaleza poseen dos caras, puesto que descansan sobre la relación entre dos partes actuantes por lo menos, la acción y la reacción. [21, Artículos, Fundamentos del movimiento]

Consideremos el diagrama de la Figura 2. Podemos analizar la negación hegeliana. Es claro que se tiene, por definición, una presentación de este mismo enunciado mediante la expresión:

$$N = (0\ 1)(\text{tesis antítesis síntesis})$$

Como resultado, se tienen las expresiones:

$$N \text{ tesis} = \text{antítesis} \qquad N \text{ antítesis} = \text{síntesis}$$

y, tal vez no sea tan clara, las condiciones:

$$N \text{ síntesis} = \text{tesis} \qquad N\ N \text{ tesis} = \text{síntesis}$$

En las exposiciones no formales de la dialéctica no queda claro que la negación de la *síntesis* sea una nueva *tesis*. De alguna manera se suele inducir a pensar que el valor lógico *síntesis* coincide con *tesis*. Si esto fuera así, la dialéctica se convierte en la dialéctica *yin– yang* y esta situación es groseramente falsa. Nos encontramos aquí, por primera vez, con un resultado que al ser enunciado en forma precisa adquiere un aspecto no esperado. Esta situación aparece muchas otras veces.

Es importante analizar el problema de la negación. En la lógica hegeliana la negación es de grado 6, en la lógica *yin–yang* es de grado 2. Esta diferencia hace, por ejemplo, que sea no trivial la doble negación de la *tesis*, a diferencia de lo que ocurre en la lógica *yin–yang* **D2**:

$$N\ N \text{ yin} = \text{yin} \qquad N\ N \text{ yang} = \text{yang}$$

En cambio, la triple negación en **D3** se cumple con: $N\ N\ N \text{ tesis} = \text{tesis}$.

Al igual que en el caso *yin–yang*, se plantea en el caso hegeliano la duda sobre los valores lógicos. En buena medida resulta difícil aceptar, al principio, que la terminología clásica haga referencia a valores lógicos y no a otro tipo de entidades. En las formulaciones imprecisas de la dialéctica se suele considerar que *tesis*, *antítesis*, etc, son *estados* de un proceso dinámico. Ocurre lo mismo que en el caso de la dialéctica *yin–yang*: son las propiedades materiales las que generan una lógica y de allí la confusión. En definitiva, el problema nace de que la lógica es un *reflejo*, *una abstracción* de las propiedades materiales del universo. Por esta razón existe la confusión.

Hay otro punto, digno de destacarse, que también puede causar una cierta perplejidad inicial. Al igual que en el diagrama *yin–yang*, en el diagrama de Hegel no se pueden diferenciar los tres elementos. Esto hace que no exista nada que permita diferenciar una *tesis* de una *antítesis* o una *síntesis*. Una afirmación no tiene, en abstracto, uno de estos valores *asignado por su contenido*. Le son aplicables por igual los tres valores. Así resulta que cualquier afirmación tanto es punto de partida como de llegada, tanto *tesis* como *antítesis*, las diferencias nacen de las *relaciones recíprocas* solamente.

En definitiva, la concepción teórica de la historia de Toynbee difiere de la concepción del materialismo histórico solamente en un punto: en tanto que la primera ocurre en la lógica dialéctica de dos elementos, la segunda ocurre en la dialéctica de tres elementos. Por supuesto que ésta es una manera muy abreviada de enunciar diferencias que son un abismo, pero es bueno precisar que, desde un punto de vista abstracto, la diferencia es numérica.

Más adelante regresaremos sobre este punto. Por el momento nos conformaremos con adelantar algo más en la interpretación de los valores lógicos de la dialéctica.

La primera ley de la dialéctica

El texto de Engels sobre la primera ley de la dialéctica es claro y no ofrece dificultades de comprensión:

> *Gesetz vom Umschlagen von Quantität in Qualität und umgekehrt. Dies können wir für unsern Zweck dahin ausdrücken, daß in der Natur, in einer für jeden Einzelfall genau feststehenden Weise, qualitative Änderungen nur stattfinden können durch quantitativen Zusatz oder quantitative Entziehung von Materie oder Bewegung* [. . .] [21, Artikel, Dialektik][69]

[69] Ley del cambio de la cantidad en calidad e inversamente. Podemos expresar esta ley, para nuestro propósito, diciendo que, en la naturaleza, y de un modo claramente establecido para cada caso singular, los cambios cualitativos solo pueden producirse mediante la adición o sustracción cuantitativas de materia o de movimiento [. . .] [21,

Esta ley regula los "saltos" en el devenir. Establece de una manera muy clara que todo cambio obedece siempre a una acumulación en cantidad de una entidad real, medible y observable. Esta acumulación conduce a un "salto", un cambio en calidad. A su ver, luego del cambio en calidad comienza nuevamente otro proceso de acumulación –posiblemente diferente– y así sucesivamente.

En el lenguaje cotidiano se expresa de diversas maneras esta idea. Así por ejemplo, se dice:

- Es la gota que derrama el vaso.
- Tanto va el cántaro a la fuente, que al fin se rompe.

En la ciencia existen diversos ejemplos de aplicación de esta ley. Uno de los primeros ejemplos lo formuló Paracelsus –el célebre alquimista– acerca de los venenos y, por extensión, de los remedios. Constituye uno de los fundamentos de la farmacología:

> *Alle Dinge sind Gift, und nichts ohne Gift; allein die Dosis macht, daß ein Dinge kein Gift ist.*[70]

Sin duda remedios y venenos son dos ideas contrarias, sin embargo según esta afirmación es solamente la cantidad lo que provoca el cambio en calidad.

Henri Poincaré (1854, 1912) fue quien primero descubrió un ejemplo de salto en calidad *en forma precisa* en la matemática. El movimiento de dos partículas que gravitan entre sí había sido resuelto por Newton. Sin embargo fue Poincaré quien descubrió que el problema, para tres partículas o más, era de una complejidad matemática enorme. Este ejemplo dio origen a nuevos problemas y nuevos métodos de estudio de los sistemas dinámicos, ver [79].

La física posee diversos ejemplos de aplicación de esta ley, pero consideremos uno de los más claros: la mecánica estadística. Tomemos como ejemplo una cita de la física teórica de Lev Landau (1908, 1968) y Evgeny Lifchitz (1915, 1985) al comienzo de la mecánica estadística:

Artículos, Dialéctica]

[70] Todas las cosas son veneno y nada es sin veneno; solamente la dosis hace que una cosa no sea veneno.

> *Ainsi, quoique le mouvement d'un système mécanique ayant un grand nombre de degrés de liberté soit soumis aux mêmes lois mécaniques que le mouvement d'un système ayant un petit nombre de particules, la présence même de ce gran nombre de degrés de liberté donne naissance à des lois qualitativement nouvelles.*[71] [52, I, 1]

Un sistema formado por una cantidad de elementos iguales posee una conducta que depende de la cantidad de estos elementos. Supongamos que existen N elementos. Si N es pequeño el sistema será, simplemente, la suma de sus partes y podrá analizarse y explicarse la conducta global mediante la conducta de cada una de sus partes. Pero al aumentar el número N se llega a un punto en que el sistema ya no puede explicarse por sus partes constituyentes, ha adquirido nuevas propiedades por el mero hecho de sobrepasar una barrera de cantidad. El estudio de estos sistemas dio origen a una nuevo rama de la física: la mecánica estadística.

La evolución de las especies de Darwin se basa en la acumulación de pequeñas diferencias favorables que terminan por crear una especie nueva. Esto ocurre, por ejemplo, por un cambio en el medio ambiente o por migración y adaptación a un nuevo ambiente.

En las ciencias sociales también la cantidad determina la calidad. Consideremos el número N de seres humanos que son objeto de estudio. Por ejemplo (con límites arbitrarios), si $N < 6$ su estudio es objeto de la psicología, si $6 \leq n \leq 50000$ es objeto de estudio de la sociología o la antropología; si N es mucho mayor que estos números, es objeto de la historia. Por supuesto que los límites propuestos son convencionales y solamente ejemplifican un problema similar a la mecánica estadística.

En la economía John Maynard Keynes (1883, 1946) argumentaba que en tiempos de crisis la conducta de los individuos es de ahorro pero la conducta del Estado debe ser de inversión. En este caso es evidente que existe un cambio de calidad al aumentar el conjunto social afectado. A veces se enuncia esto –con humor– diciendo que "el ahorro es la

[71] A pesar de que un sistema con un gran número de grados de libertad está sometido a las mismas leyes del movimiento que un sistema que tiene un pequeño número de partículas, la presencia de este gran número da origen a leyes cualitativamente nuevas.

base de la pobreza" en oposición al enunciado corriente contrario.

En la filosofía también se presentan problemas que finalizan en esta ley de la dialéctica. Tal vez el mejor caso sea un ejemplo atribuido a Bertrand Russell que pretende ilustrar sobre la debilidad de la mera observación experimental y de la leyes empíricas. El ejemplo es así.[72]

> *It concerns a turkey who noted on his first morning at the turkey farm that he was fed a 9 am. After this experience had been repeated daily for several weeks the turkey felt safe in drawing the conclusion "I am always fed at 9 am". Alas, this conclusion was shown to be false in no uncertain manner when, on Christmas eve, instead of been fed, the turkey's throat was cut.*[73] [13, IV]

El ejemplo es ingenioso, pero no es lo mismo ser empirista que dialéctico. El análisis del pavo es incompleto. Una observación más detallada le habría mostrado que, además de alimentarlo todos los días, *aumentaba sistemáticamente de peso*. Un pavo dialéctico habría pensado que "algo está sucediendo, aumento de peso, esto no puede continuar indefinidamente así, algo sucederá, no sé cuándo ni qué, pero algo nuevo sucederá". Este ejemplo, con sus dos interpretaciones, muestra la diferencia del análisis simple frente al análisis dialéctico.

La dialéctica en Jonia

En la Jonia materialista del siglo –6 surgió una noción importante para el pensamiento de Occidente: la noción de *elementos*. En su forma tradicional, la materia estaba formada por cuatro elementos: *fuego*, *tierra*, *aire* y *agua*. Entre los fragmentos conservados de Empedokles encontramos:

---

[72] La idea se encuentra esbozada en [85, VI].

[73] Se trata de un pavo que notó, en su primer mañana en el criadero, que era alimentado a las 9 de la mañana. Luego de haber experimentado por varias semanas la misma conducta extrajo la siguiente conclusión "siempre soy alimentado a las 9 de la mañana". Lástima que su conclusión mostró ser falsa en forma rotunda cuando en la víspera de la Navidad, en lugar de alimentarlo, le cortaron la cabeza.

Hear first the four roots of all things: shining Zeus, life–bringing Hera, Aidoneus and Nestis [...] [20, Diels #6][74]

At one time it grew together to be one only out of many, at another it parted asunder so as to be many instead of one; Fire and Water and Earth and the mighty height of Air; [...] [20, Diels #17][75]

For all of these –sun, earth, sky, and sea– are at one with all their parts that are cast far and wide from them in mortal things. [20, Diels #22][76]

For they prevail in turn as the circle comes round, and pass into one another, and grow great in their appointed turn. [20, Diels #26][77]

Es usual interpretarlos en sentido literal y hacer decir a los materialistas jonios la simpleza de que todo el universo se formaba por estas cuatro entidades. Sin embargo, es posible una interpretación más interesante. El último fragmento de Empedokles abre una puerta y Erakleitos nos presenta esta interesante perspectiva:

Fire lives in the death of earth, air in the death of fire, water in the death of air, and earth in the death of water. [45, Diels #34][78]

El concepto de *vivir de la muerte*, de evidente contenido dialéctico, se encuentra en otros fragmentos que han sobrevivido de Erakleitos. Este enunciado posee una estructura en devenir circular:

$$\cdots \to \text{tierra} \to \text{fuego} \to \text{aire} \to \text{agua} \to \text{tierra} \to \cdots$$

La idea devenir está presente en varios fragmentos de Erakleitos:

---

[74] He aquí las cuatro raíces de todas las cosas: el brillante Zeus, Era que da vida, Aidoneus y Nestis. [Los dioses corresponden a los elementos: fuego, tierra, aire y agua.]

[75] En un tiempo crecieron juntos para ser uno solo de muchos, en otro se separó para ser muchos en lugar de uno: Fuego y Agua y Tierra y la poderosa altura del Aire; [...]

[76] Porque todas estas cosas –el sol, la tierra, el cielo y el mar– son una con todas sus partes son convertidas lejos de ellas en objetos mortales.

[77] Porque permanecen cuando el círculo gira, y pasan uno al otro, y crecen mucho en cada correspondiente turno.

[78] El fuego vive en la muerte de la tierra, el aire en la muerte del fuego, el agua en la muerte del aire y la tierra en la muerte del agua.

> *They do not step into the same rivers. It is other and still other waters that are flowing.*[79] [45, Diels #20]
>
> *You cannot step twice into the same river, for other waters and yet others go ever flowing on. They go forward and back again.*[80] [45, Diels #21]
>
> *Into the same rivers we step and do not step. We exist and we do not exist.*[81] [45, Diels #110]
>
> *Cool things become warm, the warm grows cool, the moist dries, the parched becomes moist.*[82] [45, Diels #22]
>
> *Immortals become mortals, mortals become immortals; they live in each other's death and die in each other's life.*[83] [45, Diels #66]
>
> *In the circumference of the circle the beginning and the end are common.*[84] [45, Diels #109]

Si interpretamos la idea de rotación de los elementos como una negación, pueden ser considerados una forma de diagrama, tal como muestra la Figura 3.

Los valores extremos del diagrama se pueden interpretar, en términos de los elementos, que corresponden al vacío y a la *quinta esencia* o *éter*. Sobre este reticulado se define una negación. Por similitud con los casos dialécticos ya encontrados, la negación es:

$$N = (nada\ todo)(tierra\ fuego\ aire\ agua)$$

empleando nuevamente la notación de sustituciones. Se tiene $N\ tierra = fuego$, $N\ fuego = aire$ y así sucesivamente.

[79] No entran en los mismos ríos. Es otro y son otras las aguas que fluyen.

[80] Tú no puedes entrar dos veces en el mismo río, porque son otras las agua que fluyen. Avanzan y regresan otra vez.

[81] En el mismo río entramos y no entramos. Existimos y no existimos.

[82] Las cosas calientes devienen tibias, las tibias devienen frías, la humedad se seca, lo seco deviene húmedo.

[83] Los inmortales devienen mortales, los mortales devienen inmortales; viven cada uno de la muerte de los otros y mueren en la vida de los otros.

[84] En la circunferencia del círculo el comienzo y el fin son lo mismo.

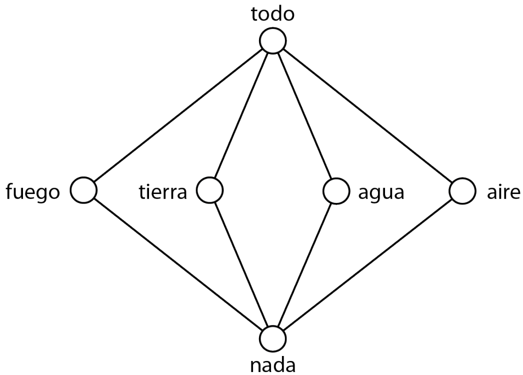


Figura 3: Reticulado **D4** de los elementos en Jonia.

Hasta aquí puede pensarse que hay más fantasía que realidad. Sin embargo, la escolástica medieval posterior agregó a los cuatro elementos tradicionales, otras cuatro nociones básicas y elementales: *húmedo*, *frío*, *seco* y *caliente*. Es bien conocido que se establecieron relaciones lógicas tales como:

agua = *húmedo* **Y** *frío*

tierra = *frío* **Y** *seco*

fuego = *seco* **Y** *caliente*

aire = *caliente* **Y** *húmedo*

Estas relaciones conducen al diagrama que llamaremos **2D4** y que se presenta en la Figura 4. Es interesante observar que las relaciones lógicas nuevas coinciden con la rotación de los elementos que propuso Erakleitos.

Los elementos en China

En el pensamiento tradicional chino encontramos una concepción de los elementos diferente de la occidental:

> *Les Éléments étant énumérés dans l'ordre de la succession des Saisons qu'ils symbolisent, la théorie veut que cet ordre soit celui d'une succession régulière en forme de cycle. D'après cette théorie, dite de la production réciproque des éléments, le*

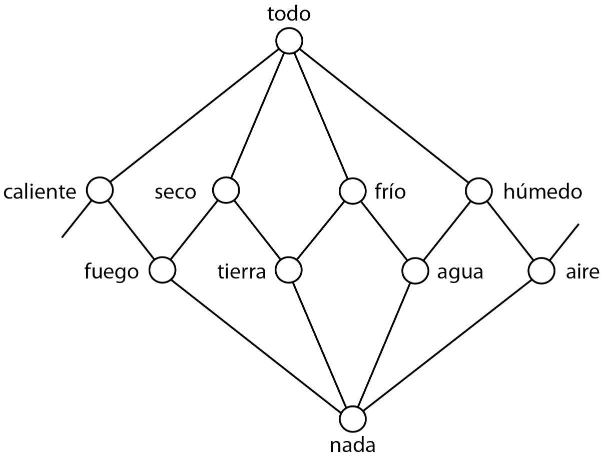


Figura 4: Reticulado **2D4** con los elementos Medievales.

> *Bois engendre le Feu, le Feu engendre la Terre* [...] *l'Eau engendre le Bois. Une troisième disposition oppose les Éléments* [...] *La théorie correspondante est celle d'après laquelle les éléments triomphent les uns des autres dans l'ordre inverse à celui de l'énumération : le Métal triomphe du Bois , le Bois de l'Eau* [...] *la Terre du Métal.* [30][85]

Los cinco elementos chinos, que difieren claramente de los occidentales, se encuentran relacionados por dos formas de girar, *dos negaciones* como corresponde decir en una concepción dialéctica. La primera negación está asociada a la génesis, la segunda a la destrucción. Como podemos apreciar estas ideas extienden, en líneas generales, el pensamiento de Erakleitos. Podemos interpretar esta teoría como un diagrama **D5**, Figura 5 en el cual se consideran dos negaciones diferen-

[85] Los elementos se enumeran en el orden de sucesión de las Estaciones que simbolizan. La teoría intenta sostener que este orden es el de una sucesión regular en forma de ciclo. Según esta teoría, la teoría de la producción recíproca de los elementos, la Madera engendra al Fuego, el Fuego engendra a la Tierra [...] el Agua engendra a la Madera. Una tercera disposición opone los elementos [...] La teoría correspondiente es la cual mediante los elementos triunfan unos sobre los otros [...] el Metal triunfa sobre la Madera, la Madera triunfa sobre el Agua [...] la Tierra triunfa sobre el Metal.

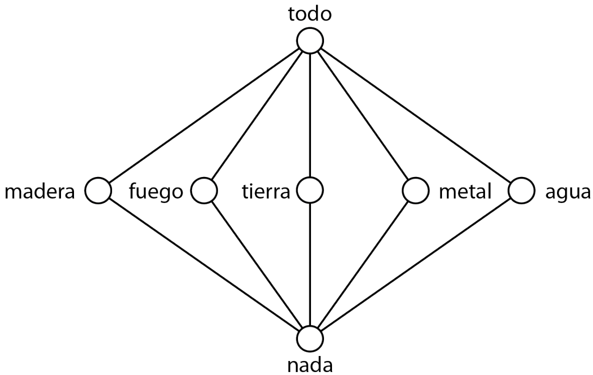


Figura 5: Reticulado **D5** con los elementos chinos.

tes, la génesis **G** y la destrucción **D**:

$$G = (nada\ todo)(madera\ fuego\ tierra\ metal\ agua)$$

$$D = (nada\ todo)(metal\ madera\ agua\ fuego\ tierra)$$

Estas dos transformaciones originan diferentes "rotaciones" en el reticulado y *también admiten una interpretación en devenir* igual que en los casos anteriores. Es un descubrimiento de mucha fineza sobre el cual tendremos oportunidad de regresar más adelante.

El pensamiento daoísta intentó conciliar la idea binaria de *yin* y *yang* con los cinco elementos tradicionales. Zhuāng Zǐ –uno de los maestros daoístas más importantes, ver [96, 97, 98, 99]– vincula el pensamiento daoísta con la idea tradicional de la dualidad *yin–yang*, cosa que Lǎo Zǐ sugiere pero no menciona en forma explícita:

> *When the state of Yin was perfect, all was cold and severe; when the state of Yang was perfect, all was turbulent and agitated. The coldness and severity came forth from Heaven; the turbulence and agitation issued from Earth. The two states communicating together, a harmony ensued and things were produced. Someone regulated and controlled this, but no one has seen his form. Decay and growth; fullness and emptiness; darkness and light; the changes of the sun and the transformations of the moon:– these are brought about from*

> *day to day; but no one sees the process of production. Life has its origin from which it springs, and death has its place from which it returns. Beginning and ending go on in mutual contrariety without any determinable commencement, and no one knows how either comes to an end.* [96, XXI, 4][86]

Vemos aquí un complejo enunciado en el cual *yin* y *yang* se penetran y se encuentran en un movimiento circular que genera todo y es la causa de todo. El pensamiento daoísta debió conciliar entonces los elementos con esta causalidad. Con cinco elementos, solamente basta con aceptar que el proceso de síntesis posee etapas parciales. El ciclo de génesis de los elementos se convierte ahora, con la visión dialéctica en:

Metal	→	Agua	→	Madera	→	Fuego	→	Tierra
nuevo *yin*	→	completo *yin*	→	nuevo *yang*	→	completo *yang*	→	síntesis

Esta forma ampliada de la dialéctica es una de las cumbres del pensamiento chino, además de preceder en más de dos mil años a Hegel.

La gran conclusión y la gran interrogante de esta sección –y de las dos secciones anteriores– se ha desplazado desde la interpretación de los diagramas a un problema más general acerca del significado de la lógica y su vinculación con la realidad material del universo.

La dialéctica en América precolombina

En América precolombina se encuentran vestigios de un pensamiento dialéctico incipiente. No disponemos de mucha información porque solamente los mayas poseían una escritura elaborada. La transmisión oral directa es escasa porque los conquistadores, cronistas y colonos no se interesaban en conocer el pensamiento de los nativos ame-

[86] El *yin* perfecto es oscuro y estático, el *yang* perfecto es luminoso y turbulento. La oscuridad y la inmovilidad vienen del cielo, la luminosidad y la turbulencia emergen de la tierra. Los dos se mezclan, se penetran y de esta armonía nacen todas las cosas. Algo regula esta mezcla pero nadie lo ha entendido. Crecimiento y muerte, vacío y plenitud, los cambios del Sol o las fases de la Luna ocurren todos los días pero nadie ve cómo realiza el cambio. La vida tiene un origen de donde brota, la muerte tiene un lugar a donde regresa, fin y comienzo forman un círculo y nadie ha visto que se detengan.

ricanos. No obstante esto se pueden detectar al menos en dos casos: los *anasazi* en América del Norte y los *aimara* en América del Sur.

El concepto del universo entre los *anasazi* se basa la existencia de una correspondencia cósmica, ver [40], en la cual hay una vinculación entre las direcciones espaciales, los colores, los animales totémicos y otros fenómenos naturales: los árboles, las estaciones o los “elementos”. En el Cuadro 1 se presenta el caso particular de los *zuñi*.[87] Sin duda la existencia de esta correspondencia cósmica –que también se encuentra entre los chinos y mongoles, por ejemplo– evidencia un alto grado de pensamiento filosófico abstracto.

Cuadro 1: Correspondencia cósmica entre los *zuñis*.

dirección	**color**	**totem**	**estación**	**“elemento”**
Norte	amarillo	grulla, pavo	invierno	viento
Oeste	azul	oso, coyote, hierba	primavera	agua
Sur	rojo	tejón, maíz, tabaco	verano	fuego
Este	blanco	ciervo, antílope	otoño	helada
Zenit		Sol, cielo, águila		
Nadir		agua, víbora, sapo		

No está descrita una noción de negación o de devenir. Un aspecto a destacar es que se trata de *seis* “elementos”, algo más complejo que entre los chinos o los griegos.

El caso más sorprendente de lógica natural es, sin duda, el caso *aimara*. Este importante descubrimiento se debe a Iván Guzmán de Rojas [39] y merece una consideración destacada. Desde los primeros estudios que se realizaron de la lengua, llamó mucho la atención el peculiar manejo de los sufijos. Ludovico Bertonio la llamaba “maquinaria de partículas”. Sin embargo, este aparato lingüístico no fue profundizado en muchos de sus aspectos, en especial en sus aspectos lógicos.

Si partimos de la base que el pensamiento lógico debe ser expresado a través del lenguaje, uno de los resultados más importantes que se

[87] Entre los *tewas* las correspondencias son algo diferentes. Entre los *hopi* también existen correspondencias y es posible que todos los *anasazi* las tuvieran. Los *aztecas* también tenían una correspondencia similar, pero solamente de las cuatro direcciones, que tienen muchos puntos en común con el Cuadro 1. Esto es natural porque hay una estrecha vinculación entre estos pueblos.

debe derivar de la lingüística es la estructura lógica del pensamiento espontáneo. Ya hemos insistido en este hecho. En el caso de la lengua aimara el resultado es sorprendente.

En el estudio citado se muestra con poderosos argumentos que la "maquinaria de partículas" de Bertonio expresa una lógica coincidente con la lógica modal de Lukasiewicz. Más aun, el pueblo aimara, a efectos de asegurarse la comunicación con el conquistador, adaptó la lengua española de modo de expresar los diferentes valores lógicos necesarios. A título de ejemplo analicemos algunos casos.

Existen dos modalidades de la afirmación con un significado lógico diferente. Estas modalidades se expresan mediante sufijos en el aimara o, en español, mediante formas idiomáticas especiales. Una forma de la afirmación, que expresa que x es verdadero, es:

x.pi = x pues

En cambio, con esta otra forma de afirmación:

x.ki = x nomás

se expresa la idea que existe la *posibilidad* de x pero no la certeza.

En muchas regiones de América española existe la diferenciación entre "ahora" y "ahorita" –o el más enfático "ahorita nomás"–. "Ahora" es afirmativo, expresa una certeza, una verdad; en tanto que "ahorita" es solamente una *posibilidad*. Tal vez el diminutivo sea la manera de traducir al español la peculiar lógica amerindia que diferenciaba lo que es explícito en la lengua aimara.

En estos simples ejemplos se origina, según el autor, la incomunicación entre conquistados y conquistadores. También se encuentra allí toda la lógica modal de Lukasiewicz. A lo largo del trabajo se recorren los diferentes caminos lógicos de la lengua aimara y se elabora una sorprendente dialéctica natural, desconocida hasta nuestros días. El manejo de contrarios y de peculiaridades de la función negación permite adquirir la convicción de que esta lógica natural no es una extensión de la lógica clásica griega sino una aproximación diferente al conocimiento del universo. En las sucesivas referencias a la lógica aimara se refuerza esta afirmación.

En [39] se insiste en que la lógica aimara posee estructura de anillo algebraico y no se le da importancia al carácter de reticulado. Por el contrario, en este trabajo se insiste en el carácter de reticulado y se identifica el orden parcial como la propiedad esencial de la dialéctica.

La dialéctica en la mecánica cuántica

En esta sección analizaremos la lógica cuántica de von Neumann y Birkhoff. La necesidad de introducir una lógica nueva para interpretar la mecánica cuántica nace de la formulación de proposiciones acerca del *spin* del electrón. La conducta del spin es singular y puede consultarse en la bibliografía, ver [48, 49] por mayores detalles. En resumen, la conducta se puede expresar por el diagrama de la Figura 6. Se designa con *spin X+* al caso de un electrón con el spin definido en forma precisa y dirigido hacia las X positivas. En forma análoga se define *spin X–* cuando esta dirigido hacia las X negativas y los casos correspondientes para el eje Y.

En la lógica cuántica se emplea la propiedad no distributiva de este reticulado para formular las proposiciones no equivalentes:

spin X+ **Y** (*spin Y+* **O** *spin Y–*)

(*spin X+* **Y** *spin Y+*) **O** (*spin X+* **Y** *spin Y–*)

La primera proposición es verdadera en el mundo físico en tanto que la segunda es siempre falsa porque no es posible especificar, en forma simultánea, el spin en dos direcciones diferentes. Resulta de aquí que la lógica que cumple el spin de una partícula *no es distributiva*. Hasta aquí llega la física.

Es interesante observar que los estados de las partículas elementales inducen una lógica. Esta idea, que ya hemos encontrado otras veces, se plantea también en el mundo físico. En segundo lugar, es interesante observar que la primera afirmación, que es cierta, no vale 1 sino "*spin X+*", es una verdad parcial y no una verdad absoluta. También es interesante observar que el ambiente de la lógica cuántica es un reticulado dialéctico **D4** que aparece en el Figura 6.

Finalmente, existe una negación natural en esta lógica –concepto que no ha sido tratado por la lógica cuántica tradicional– y es:

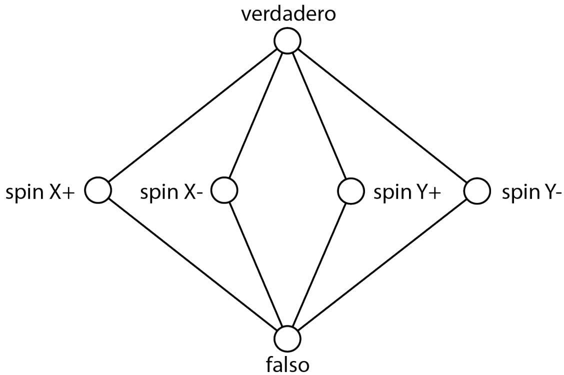


Figura 6: Dialéctica **D4** para el spin cuántico.

$$N = (0\ 1)(spin\ X{+}\ \ spin\ X{-})(spin\ Y{+}\ \ spin\ Y{-})$$

que establece relaciones de inversión del spin de la partícula.[88]

La dialéctica de Pithagoras y sus continuadores

Pithagoras (–569?, –475?) es conocido principalmente por Diogenes Laertios (S. –3).[89]

> *The principle of all things is the monad or unit; arising from this monad the undefined dyad* [. . .] *the elements of which are four, fire, water, earth and air; these elements interchange and turn into one another completely, and combine* [. . .] *There are also antipodes, and our "down" is their "up". Light and darkness have equal part in the universe, so have hot and cold, and dry and moist* [. . .][90] [17, VIII, 25–26]
>
> [*Living creatures*] *It has in it all the relations constituting life, and these, forming a continuous series, keep it together*

[88] No es ésta la oportunidad de desarrollar la noción de *complementarirdad* de Niels Bohr que se encuentra vinculada al estudio de las negaciones en los reticulados cuánticos y a los contrarios dialécticos.

[89] Omito la cita sobre el teorema del triángulo rectángulo porque no tiene vinculación con el tema de esta sección.

[90] El principio de todas las cosas es la mónada o unidad. De la mónada surge la díada indefinida [. . .] También hay antípodas y nuestro "abajo" es su "arriba". Luz y oscuridad tienen igual participación en el universo, así como caliente y frío, seco y húmedo.

> *according to the ratios of harmony, each appearing at regulated intervals.*[91] [17, VIII, 29]
>
> *The soul of man, he says, is divided into three parts, intelligence, reason, and passion.*[92] [17, VIII, 30]

Encontramos en estos fragmentos diversas ideas dialécticas: la noción de contrarios, las relaciones "armónicas" –que posteriormente se atribuyeron a la música– y la estructura triple de la naturaleza humana.

A esta información se agregan múltiples leyendas que comprenden su teoría de la música y la relación con las esferas celestes. La idea es simple: los astros móviles, visibles a ojo desnudo, son 7 –Sol, Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno– y también lo es la escala musical de 7 notas.[93] De allí que le atribuyeran la correspondencia entre estas dos estructuras –"ordenadas" según la idea medieval– como algo esencial del universo. La rotación de las esferas celestes sería la responsable de la "música celestial".

Las ideas atribuidas a Pithagoras sobrevivieron a lo largo de los siglos. Aparecieron muchas veces en los momentos y temas más diversos. De todos ellos analizaremos dos casos: Paracelsus y Kepler.

Paracelsus es el nombre de pluma del filósofo, médico y alquimista Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493, 1541). Interesa aquí repasar su visión del universo a través de sus principales ideas, ver [71].[94] La primera afirmación es la existencia de los tres "ingredientes" del universo:

> *He* [God] *originally reduced it to one body, while the elements were developing. This body He made up of three ingredients, Mercury, Sulphur, and Salt, so that these three*

[91] [Los seres vivos] Tienen en sí las relaciones que constituyen la vida y ésas forma una serie continua que mantienen relaciones armónicas y cada una aparece a intervalos regulares.

[92] El alma humana, decía, se divide en tres partes: inteligencia, razón y pasión.

[93] Los griegos no manejaban nada parecido a la escala de 7 notas, ver [33], ésta es una idea medieval y no griega. Es otra de la muchas leyendas sobre Pithagoras.

[94] Este libro contiene una recopilación de obras de Paracelsus. A los efectos de abreviar las referencias se emplearán las siguientes abreviaturas: *The Coelum Philosophorum* (CP), *The Aurora of the Philosophers* (AP), *The Generations of the Elements* (GE), *Concerning the Nature of Things* (NT), *A Short Catechism of Alchemy* (CA).

> *should constitute one body. Of these three are composed all the things which are, or are produced, in the four elements.*[95] [71, GE, I, vi]

Desde el principio se debe señalar que el Mercurio, Azufre o Sal no son los productos ordinarios conocidos como tales sino algo similar a la "esencia platónica" o "filosófica" de estos productos. A partir de la terna básica se genera la cuaterna de los elementos griegos y de allí los siete metales.

> *From that chaos God built the Greater World, separated into four distinct elements. Fire, Air, Water, Earth. Fire was the warm part. Air only the cold, Water the moist, and, lastly, Earth was but the dry part of the Greater World.* [...] *If this, by alchemical art, be anatomised and separated, all the seven metals, and these pure and unmixed, proceed from it, namely, gold, silver, copper, tin, lead, iron, quicksilver*[96] [...] [71, NT, VIII]

También estos metales son "filosóficos" y no vulgares, como muestra este pasaje del *Catecismo* y otros pasajes de sus libros.

> *Q. When the Philosophers speak of gold and silver, from which they extract their matter, are we to suppose that they refer to the vulgar gold and silver?*
>
> *A. By no means; vulgar silver and gold are dead, while those of the Philosophers are full of life.*[97] [71, CA]

[95] Él [Dios] originalmente redujo todo a un cuerpo mientras se desarrollaban los elementos. Esta cuerpo estaba hecho por tres ingredientes: Mercurio, Azufre y Sal. De modo que estos tres constituyen una unidad. De estos tres elementos están compuestas todas las cosas que son o son producidas por los cuatro elementos.

[96] A partir del caos Dios hizo el Gran Mundo, separado en cuatros elementos diferentes: fuego, aire, agua y tierra. El fuego es la parte caliente; el aire, la fría; el agua, la húmeda; y finalmente la tierra era la parte seca del Gran Mundo. [...] Si éstos, por artes alquímicas, son atomizados y separados, [aparecen] los siete metales, puros y sin mezcla: oro, plata, cobre, estaño, plomo, hierro, mercurio [...]

[97] Pregunta. Cuando los filósofos habla de oro y plata de los cuales extraen su materia ¿se supone que se refieren al oro y la plata vulgares? Respuesta. Para nada. El oro y la plata vulgares están muertos, mientras que los de los filósofos están llenos de vida.

Los metales "filosóficos" están identificados con los siete astros móviles, los cuales, a su vez, tampoco son los astros visibles sino los "filosóficos". La correspondencia es la siguiente: Sol $\leftrightarrow$ Oro, Luna $\leftrightarrow$ Plata, Mercurio $\leftrightarrow$ Mercurio, Venus $\leftrightarrow$ Cobre, Marte $\leftrightarrow$ Hierro, Júpiter $\leftrightarrow$ Estaño y Saturno $\leftrightarrow$ Plomo. Estos metales se pueden transmutar entre sí, pero hay reglas precisas.

> [...] *pay attention to Saturn, which is the highest of all, and then is succeeded by Jupiter, next by Mars, the Sun, Venus, Mercury, and, lastly, by the Moon.* [...] *experience teaches us that Mars can be easily converted into Venus, not Venus into Mars, which is of a lower sphere. So, also, Jupiter can be easily transmuted into Mercury, because Jupiter is superior to Mercury, the one being second after the firmament, the other second above the Earth, and Saturn is highest of all, while the Moon is lowest. The Sun enters into all, but it is never ameliorated by its inferiors.*[98] [71, CA]
>
> [...] *in order to transmute the five lower and baser metals, Venus, Jupiter, Saturn, Mars, and Mercury, into the two perfect metals, Sol and Luna, you must have the Philosophers Stone.*[99] [71, NT, VII]

En definitiva, la cadena de transmutaciones posibles es:[100]

> Saturno (plomo) $\rightarrow$ Júpiter (estaño) $\rightarrow$ Marte (hierro) $\rightarrow$ Venus (cobre) $\Rightarrow$ Luna (plata) $\Rightarrow$ Sol (oro)

[98] [...] pon atención a Saturno, que es el más alto de todos, luego le sigue Júpiter, seguido por Marte, el Sol, Venus, Mercurio y, finalmente, la Luna. [...] la experiencia nos enseña que Marte se puede convertir en Venus, no Venus en Marte, que está en una esfera más baja. Así también Júpiter puede ser fácilmente transmutado en Mercurio, porque Júpiter es superior a Mercurio, uno es segundo en el firmamento, el otro segundo sobre la Tierra; Saturno es el más alto de todos, mientras que la Luna es la más baja. El Sol entra en todos, pero nunca es mejorado por sus inferiores.

[99] [...] para transmutar los cinco metales bajos –Venus, Júpiter, Saturno, Marte y Mercurio– en los dos metales perfectos –Sol y Luna– se necesita la piedra filosofal.

[100] No está de más observar que la cadena de transmutaciones aumenta el valor del metal hasta llegar al máximo en el oro.

donde se indica con $\to$ la transmutación simple o del mayor al menor y con $\Rightarrow$ la transmutación que exige la *piedra filosofal*.

En definitiva, la teoría de Paracelsus consiste en una colección de correspondencias universales que llevan todo lo real a los siete planetas–metales, que conduce a los cuatro elementos griegos, a los tres ingredientes "filosóficos" y también a la clasificación binaria femenino–masculino. Esta correspondencia se extiende al cuerpo humano: el Azufre se identifica con las emociones y los deseos; la Sal, con el cuerpo y el Mercurio, con las facultades mentales superiores.

Un siglo después de Paracelsus, Johannes Kepler retomó el pensamiento pitagórico aplicado ahora a la astrología. En *Armonice mundi* de 1618 se ocupa de la disposición de los planetas en el sistema solar. La distancias de los 5 planetas al Sol se convierten en un tema obsesivo en Kepler y llega a vincularlos con los sólidos regulares y las escalas musicales. Retomaba así la idea de Pithagoras. Como muestra de sus resultados se puede citar esta proposición:

> *Los movimientos extremos de los planetas debieron señalar lugares o cuerdas del sistema de octava o notas de la escala musical.* [50, V, proposición xxii]

¿Qué tienen en común Pithagoras, Paralcelso y Kepler? En todos ellos hay una búsqueda de una correspondencia universal entre la realidad y una estructura matemática o formal muy simple. Estas estructuras poseen 2, 3, 4, 5 o 7 elementos, un sentido de rotación y son la "representación última" de la realidad. En el lenguaje que se emplea en este libro, se establece la correspondencia con un reticulado que admite una rotación y existe una forma de devenir de los elementos.

Las lógicas multivaluadas

Este estudio pretende ser una investigación formal acerca de la lógica. Desde este punto de vista, puede ser considerado como una incursión en el tema de las lógicas *multivaluadas*. Es bien conocido que este tema ha sido estudiado muchas veces como una generalización abstracta de la lógica booleana. Este trabajo es diferente, intenta enfocar el problema de la dialéctica y por esta razón finaliza en las lógicas multivaluadas. Hasta el momento actual, el enfoque de las lógicas multivaluadas finalizó siempre en el punto en el cual comenzó. Son sumamente ilustrativas las palabras de Garrett Birkhoff:

> *Most systems of modes studied in the past have been simply ordered by the degree of truth which they ascribe to propositions. All other knows to me have formed distributive lattices and hence sub direct unions to two–valued logics. The author can see no valid reason for this emphasis on simple ordering. It would seem worthwhile to construct propositional calculi base on non–distributive lattices of truth–values –say, on the two non–distributive lattices of five elements. In my own attempts to do this, I have been troubled by the problem as to how the truth–values of p and q should determine the truth–value of* $p \Rightarrow q$ *and* $\neg p$. [4, XII, 8][101]

Esta situación nace de un intento razonable –Birkhoff intuye con su olfato de matemático que el problema se encuentra en los reticulados de cinco elementos **D3**, el reticulado hegeliano– pero sin una orientación real para estudiar el problema. Lo mismo les ocurrió a los que estudiaron el problema posteriormente: no se apartaron de la idea que la lógica se construye a partir de la negación y la implicación, sin considerar operaciones nuevas. Como veremos en los capítulos que siguen el problema está lejos de ser sencillo.

En este estudio el problema se plantea al revés: existe la dialéctica en la naturaleza y es necesario, por lo tanto, encontrar su expresión formal. Como consecuencia se llega a una lógica multivaluada. Hasta aquí esta todo claro. Pero el problema no finaliza con la simple formalización.

---

[101] La mayoría de los sistemas estudiados en el pasado simplemente ordenan los grados de verdad que poseen las proposiciones. Todos los que me son conocidos emplean reticulados distributivos y por lo tanto uniones sub–directas de lógicas binarias. El autor no ve ninguna razón válida para poner este énfasis en un orden tan simple. Parece valer la pena construir un cálculo proposicional basado en reticulados no distributivos de valores lógicos, digamos de cinco elementos. En los intentos que he realizado para hacer esto me he visto obstaculizado por la dificultad de determinar, a partir de los valores lógicos de p y q, los valores de $p \Rightarrow q$ y de $\neg p$.

Introducción intuitiva a la dialéctica

Introducción

En este capítulo se introducen diversas nociones en forma intuitiva. Tiene por finalidad realizar el pasaje entre los ejemplos tomados del lenguaje natural, las concepciones filosóficas del pasado y la formalización de la dialéctica como una teoría abstracta.

A lo largo del capítulo anterior las diversas figuras han introducido reticulados sin realizar una definición precisa. Los diferentes diagramas mostraban círculos conectados mediante líneas. La idea que se maneja es que si un elemento (un círculo) se conecta con otro, esto establece una relación de orden entre el elemento inferior y el superior. Así por ejemplo, en la Figura 4 los elementos *agua* o *aire* son inferiores al elemento *húmedo* y éste es inferior al elemento *todo*.

Esta estructura que conecta elementos entre sí mediante una ordenación o jerarquía, es lo que los matemáticos llaman reticulado. En el capítulo siguiente se presenta una definición formal.

La idea de orden o de jerarquía está relacionada con la idea de "mayor valor lógico que" que ha aparecido en los capítulos introductorios. Esta idea es la base de la estructura matemática de reticulado como se ve en la definición formal.

Las aplicaciones de las dialécticas naturales sugieren fuertemente que los diferentes valores dialécticos son *formalmente equivalentes*, nada *formal* los diferencia. Es la semántica de las aplicaciones lo que permite diferenciar *yin* de *yang*, tal como lo hacen los filósofos chinos o Toynbee. No es así en el caso de Oscar Wilde. Del mismo modo, entre los elementos jonios o los chinos clásicos es solamente la semántica lo que diferencia a cada uno. Es más, Oriente y Occidente consideran diferentes colecciones de elementos y hasta diferente cantidad. Lo esencial de su pensamiento es la existencia y rotación que ocurre entre ellos.

Lógica y reticulados

La vinculación estrecha que existe entre la lógica y las estructuras algebraicas conocidas como *reticulados* (*lattices, treillis*) ha sido puesta de manifiesto en muchas oportunidades diferentes. Sin ánimo de realizar una enumeración completa, pueden recordarse los casos:

- las lógicas booleanas, ver [4],
- las lógicas multivaluadas, ver [57, 58],
- la epistemología genética de Piaget, ver [2, 74],
- la lógica cuántica, ver [48, 49],
- las lógicas multivaluadas de uso técnico, ver [88].

Las vinculaciones entre los reticulados y las lógicas booleanas son bien conocidas. Los primeros intentos de construir lógicas multivaluadas, realizados por Jan Lukasiewicz (1878, 1956) y Alfred Tarski (1901, 1983) [57, 58] o Emil Post (1897, 1954)[80], conducían a reticulados muy simples, con estructuras lineales de cadenas. No debemos desconocer, sin embargo, que la formalización de la teoría de los reticulados recién ocurrió entre 1933 y 1937, bastante después de estos primeros intentos de generalización. Posiblemente por su simplicidad, estos intentos no progresaron todo cuanto hubieran podido.

En el estudio de la génesis del conocimiento que emprendió Jean Piaget (1896, 1980) encuentró en reiteradas ocasiones la noción de reticulado y esto le llevó a considerar estructuras intermedias, los *groupement*,[102] entre los grupos y los reticulados, como formas de expresión de esta génesis [73]. Ya desde los comienzos de la formulación de la mecánica cuántica, John von Neumann (1903, 1957) y Garret Birkhoff (1911, 1996) y otros autores [48] reconocieron la necesidad de expresar las relaciones lógicas que ocurren en algunos aspectos de la teoría con reticulados más complejos que los booleanos. En este caso particular, era la propiedad distributiva de la operación lógica **Y** la que sugería este camino. Sin embargo, estos intentos no se han concretado, hasta el presente, en resultados nuevos.

[102] En [2, III,1] se presenta una *formalización* de estas ideas.

Los desarrollos modernos de la microelectrónica han conducido, en una forma natural, a lógicas multivaluadas con una aplicación técnica directa, ver [48, 56, 88].

Todos estos antecedentes nos llevan de una manera natural a considerar a los reticulados como "el ambiente" de la lógica. En este hecho influye en forma decisiva la existencia de las operaciones lógicas **Y** y **O** como operaciones básicas de un reticulado. Sin embargo, para introducir una lógica en un reticulado –y aun más para formalizar a la lógica dialéctica– es necesario especializar los reticulados e introducir nociones nuevas. Este trabajo tiene como finalidad presentar "el ambiente general de la lógica" y dar forma precisa –o mejor dicho, forma algebraica– desde los enunciados del pensamiento espontáneo del hombre hasta las ideas de los clásicos del materialismo dialéctico.

Las operaciones en un reticulado

En los reticulados se pueden definir dos operaciones, duales entre sí, entre dos elementos. Una operación asocia a cada par de elementos un tercer elemento que es "superior" o que está más alto en el diagrama, pero conectado a ambos. Esta operación se llama **O**. En forma dual, se define **Y** como la "inferior" a los dos elementos. Así por ejemplo se pueden completar las definiciones de la página 61 con:

agua = *húmedo* **Y** *frío*	*agua* **O** *aire* = *húmedo*
tierra = *frío* **Y** *seco*	*tierra* **O** *agua* = *frío*
fuego = *seco* **Y** *caliente*	*fuego* **O** *tierra* = *seco*
aire = *caliente* **Y** *húmedo*	*aire* **O** *fuego* = *caliente*

La idea es expresar, por ejemplo, que lo que tienen en común lo *húmedo* y lo *frío* es el *agua*, lo que resulta de la unión del *agua* con el *aire* es lo *húmedo*. Estas dos operaciones, duales entre sí, poseen la misma estructura formal que las operaciones **Y**, **O** de la lógica.

Los reticulados poseen un elemento máximo y uno mínimo. En algunos diagramas se han representado, respectivamente, "verdadero" y "falso", "todo" y "nada" u otras palabras adecuadas. En adelante también se emplearán también 1 y 0.

Las demás notaciones y operaciones necesarias se definirán a medida que sean introducidas en la exposición formal. Como referencia general a los reticulados se puede consultar los libros clásicos de Birkhoff [4, 5] o el más moderno [16].

Semántica de los valores lógicos

Desde el comienzo de este trabajo se supuso que existía una correspondencia directa entre el supremo del reticulado, que representábamos como 1, y el valor lógico "verdadero". Del mismo modo se tomó el valor lógico "falso" como 0 y coincidente con el ínfimo del reticulado. Los elementos intermedios, los valores dialécticos, es la novedad que introduce la dialéctica.

Los *valores dialécticos* son valores lógicos intermedios entre "verdadero" y "falso", que llamamos "tesis" por extensión de la terminología de Hegel. Con carácter general se puede decir que representan grados intermedios de verdad o de falsedad. Algo más adelante se suministran ejemplos de interpretación de estos casos. Históricamente, en las lógicas modales, al valor intermedio de **C3**, Lukasiewicz [58] le llamaba "hipotético", Reichenbach [49] lo llamaba "indeterminado". En las lógicas técnicas se introducían valores diferentes de "verdadero" y "falso" con otras denominaciones.

El cálculo proposicional tradicional se puede generalizar de inmediato mediante la siguiente definición.

Definición 1 *Llamamos "valor tesis" –o simplemente "tesis"– a todo valor diferente de 0. Llamamos "verdad" o "verdad absoluta" al valor 1 y "falso" o "falsedad" al valor 0.*

Esta definición difiere con la interpretación de Lukasiewicz, que consideraba dudosos –de alguna manera en grados de verdad– a los valores intermedios. En la dialéctica expresan valores que no son absolutamente verdaderos, ya sea porque son etapas de un conocimiento posiblemente incompleto, porque pueden cambiar o por que son etapas intermedias de un proceso de devenir. Así por ejemplo, tal como ya hemos analizado casos de dialécticas naturales, entre otros son tesis:

- Las verdades del arte, tal como enunciaba Oscar Wilde. Su contraria también es verdadera, no es una verdad absoluta, pero tampoco es falsa, es un valor intermedio.
- Los enunciados que emplean la conjunción "pero", afirman algo que es menos que el **O** pero más que **Y**.
- Los estados transitorios del devenir, tal como los estados *yin* o *yang* en la dialéctica de la historia de Toynbee.

Es necesario diferenciar algunos tipos adicionales de proposiciones que no existen en la lógica binaria. Una expresión puede ser de diferentes tipos, como muestra esta definición.

Definición 2 *Una función dialéctica de varias variables, según sea el valor lógico que tome para los diferentes valores de sus variables, se llama:*

- tautología *o* verdad *o* verdad absoluta *si vale 1 siempre,*
- falsedad *si vale 0 siempre,*
- tesis *si no vale 0 nunca,*
- tesis estricta *si solamente toma valores dialécticos.*

Se generaliza así la terminología de la lógica binaria tradicional.

La ciencia de la lógica

Se llamará *lógica*, sin calificativos, o *lógica binaria* a las estructuras que ocurran en el reticulado binario de dos elementos, que se designa como **B**. Los ejemplos de dialécticas naturales presentaban estructuras especiales de reticulados. Una de nuestras primeras preocupaciones consistirá en delimitar en forma bastante precisa aquellos reticulados donde ocurre la lógica dialéctica. Por cierto que no es una tarea menor. Estos reticulados no binarios serán llamados *reticulados dialécticos*. Por supuesto que ésta no es sino una definición informal e imprecisa, apenas la introducción de una terminología.

El estudio sistemático de las propiedades de los reticulados dialécticos es un área especializada del álgebra que puede llamarse *dialéctica formal* o, mejor todavía, *la ciencia de la lógica*. A lo largo de este estudio se analizará una clase particular de reticulados solamente. Tenemos la esperanza que este conjunto sea suficiente para abarcar los problemas del pensamiento en sus principales aspectos.

En forma intuitiva, la lógica dialéctica que se estudia en este libro es una *lógica modal* "*cuantificada*". Entre los valores 0 (falso) y 1 (verdadero) hay una cantidad finita y discreta de valores. A diferencia de las cadenas de Lukasiewicz hay varios elementos que pueden tener un valor lógico equivalente. Esta doble condición de lógica modal y de múltiples valores equivalente es lo que establece la riqueza de la lógica dialéctica propuesta.

La formalización de la dialéctica

La lógica dialéctica como imagen del universo

Los ejemplos de dialécticas analizados en lo que antecede obligan a replantearse los conceptos de la lógica tradicional. De alguna manera la lógica aparece como una estructura asociada a las propiedades fundamentales del universo, como supremas leyes de la materia y del movimiento. Esta tesis ha sido sostenida siempre por el materialismo dialéctico.

El estudio del universo se basa en la formulación de proposiciones. La vinculación entre las proposiciones constituye el conocimiento del universo. Las estructuras básicas del universo deben reflejarse de alguna manera como estructuras en las proposiciones.

En resumen, la lógica dialéctica es la combinación de tres ideas:

- una *relación de orden* que establece una jerarquía de "valor lógico" de las proposiciones,
- un *homomorfismo* que conserva y refleja las relaciones entre las proposiciones,
- una *circularidad* intrínseca en esa estructura.

La relación de orden es una idea intuitiva muy generalizada. Se expresa de diversas maneras: "es más verdadero que" o "mis razones son más fuertes que" –algo habitual en una discusión–, "estas idean son más simples que" –la navaja de Okham–, "esto es consecuencia de esto otro" –el razonamiento deductivo espontáneo–. La lógica dialéctica debe dar respuesta a esta relación de orden.

La lógica dialéctica aparece como una correspondencia estructural –un *homomorfismo*, idea matemática que se define más adelante en forma precisa– que establece una correspondencia entre las proposiciones capaces de expresar el conocimiento del universo, sobre una estructura más reducida, más simple, de unos pocos *elementos*: tres, cuatro, cinco, doce o más. La existencia de este homomorfismo es la razón de la coincidencia entre estados o propiedades de la materia y las estructuras lógicas que "explican" estas propiedades.

La idea de circularidad está presente en esta correspondencia: los *cuatro elementos* de Occidente, los *cinco elementos* chinos o las *tres entidades* universales –*yin*, *yang*, síntesis–, las interpretaciones mágicas –numerológicas o astrológicas– y tantas otras, poseen circularidad. No son sino homomorfismos incipientes, pero basados en intentos razonablemente acertados. El pensamiento pitagórico –y el de sus seguidores– consiste en un homomorfismo sobre *siete elementos* en un orden determinado y de allí la importancia de los astros móviles, las escalas musicales y tantas otras estructuras asimilables. La astrología –tanto occidental como oriental– no es sino una especulación acerca de *doce elementos* inspirada en las doce lunas del año. La periodicidad es evidente.

La combinación de las tres propiedades básicas de la lógica conduce naturalmente a una estructura algebraica de *reticulado* con propiedades particulares –que definiremos más adelante– y que llamaremos *dialécticos* por presentar a las tres propiedades mencionadas.

Reticulados y valores lógicos son la imagen de estas propiedades materiales y de allí que se produzca esta coincidencia inesperada entre "elementos" y valores lógicos. La epistemología espontánea del hombre descubrió este homomorfismo e intentó darle una presentación abstracta, con mayor o menor éxito. De hecho fue George Boole [6] quien logró formalizarlos por primera vez. Este homomorfismo sobre las estructuras algebraicas refleja el conocimiento de la materia y del cambio. Esto muestra que tanto la lógica como la matemática no son una libre creación del cerebro humano sino algo atado al universo material con la fuerza de una ley natural.

Generalidades sobre los reticulados

Los reticulados son estructuras algebraicas –finitas o infinitas– definidas a partir de una noción básica, la noción de *orden parcial*. Esta noción se define como sigue.

Definición 3 *Un conjunto **L** se dice* parcialmente ordenado *–o simplemente* ordenado*– si existe una relación $\leq$, definida entre los elementos de **L**, que cumple para todo $x, y, z \in$ **L**:*

1. *Reflexiva o idempotente (I): $x \leq x$.*
2. *Antisimétrica: si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.*
3. *Transitiva (T): si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.*

Por extensión se dice que $x < y$ si se cumple $x \leq y$ pero $x \neq y$.

El ejemplo más simple es la *cadena*, un conjunto ordenado linealmente: dado dos elementos x, y, o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$. Todos los elementos son comparables entre sí. Un ejemplo más complejo es **2D4** en la Figura 4. En este caso, dos elementos son comparables si están unidos por trazos en el diagrama. Así por ejemplo se tiene: *falso* $\leq$ *tierra* $\leq$ *seco* $\leq$ *verdadero*. En cambio, *tierra* y *fuego* no son comparables entre sí pero poseen a *seco* como mayor a ambos.

Definición 4 *Un conjunto **L** se dice que es un reticulado si cumple, para $x, y, z \in$ **L**:*

1. *Es un conjunto parcialmente ordenado por la relación $\leq$.*
2. *Para todo par de elementos x, y existe un elemento $x \,.\, y$ que es el mayor de los elementos inferiores a ambos, esto es, si $z \leq x$ y $z \leq y$, entonces $z \leq x \,.\, y$.*
3. *Para todo par de elementos x, y existe un elemento $x + y$ que es el menor de los elementos superiores a ambos, esto es, si $x \leq z$ y $y \leq z$, entonces $x + y \leq z$.*
4. *Existe un elemento supremo, que llamamos 1, y un elemento ínfimo, que llamamos 0.*

Es inmediato que las operaciones definidas en el reticulado son idempotentes (I), asociativas (A) y conmutativas (C). Las operaciones puede extenderse a varios elementos, por lo tanto. Por abuso de lenguaje la dos operaciones se llamarán *suma* (+) y *producto* (.).

En todo reticulado se puede definir la idea de elementos contiguos.

Definición 5 *Dos elementos* x, y *de un reticulados se llaman* contiguos *si cumplen que* $x < y$*, y no existe ningún elemento* z *del reticulado que cumpla* $x < z < y$*.*

Hay algunos elementos del reticulado que tienen un nombre particular.

Definición 6 *En todo reticulado finito los elementos contiguos a 1, se llaman* máximos*, los elementos contiguos a 0 se llaman* átomos.

En este libro empleamos la *notación técnica* para las operaciones en el reticulado. Así por ejemplo, en **2D4**, Figura 4, ocurre:

seco . frío = tierra
aire + *agua = húmedo*.

En la *literatura matemática* sobre reticulados, ver [4, 5], se emplea $\cap$ para el punto y $\cup$ para el signo +.[103] Los ejemplos anteriores se escriben:

seco $\cap$ *frío = tierra*
aire $\cup$ *agua = húmedo*.

También se puede emplear la *notación lógica*: el punto se lee como **Y**, el signo + se lee **O**.[104] El ejemplo es:

seco **Y** *frío = tierra*
aire **O** *agua = húmedo*.

[103] En [16] se emplean los símbolos $\vee$ y $\wedge$ respectivamente para $\cup$ y $\cap$ para evitar la confusión con las operaciones unión e intersección de conjuntos.
[104] Russell y muchos lógicos emplean $\vee$ –que recuerda la palabra latina "*vel*" que expresa la disyunción– para el **O** y el punto para **Y**, ver [84].

Las propiedades de monotonía de las operaciones del reticulado son importantes y se encuentran en el siguiente teorema.

Teorema 1 *Si $x, y_1, y_2, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_q$ son elementos de un reticulado, entonces si $x \leq y_i$ y $z_j \leq x$ se cumplen*

$$x \leq y_1 \,.\, y_2 \,.\, \cdots \,.\, y_p \qquad x \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_p$$

$$z_1 \,.\, z_2 \,.\, \cdots \,.\, z_q \leq x \qquad z_1 + z_2 + \cdots + z_q \leq x$$

que son las propiedades de monotonía *de las operaciones.*

Demostración. Es claro que $x \leq y_1 \,.\, y_2$ puesto que $y_1 \,.\, y_2$ es la máxima cota inferior de y_1, y_2 y x debe ser menor o igual que esta cota. Aplicando este mismo resultado a $y_1 \,.\, y_2$ y y_3 se agrega el siguiente factor y así sucesivamente. Con esto queda demostrada la primera propiedad. La segunda propiedad es inmediata puesto que $x \leq y_1 + y_2$ porque $x \leq y_1 \leq y_1 + y_2$. Aplicando reiteradamente este resultado, está demostrada. La tercera propiedad es inmediata puesto que $z_1 \,.\, z_2 \leq z_1 \leq x$. Aplicando sucesivamente este resultado, está demostrada. $z_1 + z_2 \leq x$ puesto que $z_1 + z_2$ es la menor de las cotas superiores a z_1, z_2, luego x es mayor o igual. Aplicando reiteradamente este resultado, como en el primer caso, queda demostrada la cuarta propiedad. □

Entre dos reticulados se pueden definir diversas correspondencias entre sus elementos:

Definición 7 *Se llama* homomorfismo ***H*** *entre dos reticulados a una correspondencia entre $x_i \in$ **L** e $y_i \in$ **M** tal que a los elementos $x_1 \,.\, x_2$ y $x_1 + x_2$ de **L** le corresponden, respectivamente, $y_1 \,.\, y_2$ y $y_1 + y_2$ en **M**. En otras palabras, conserva las dos operaciones entre los elementos de los reticulados. Si **L** coincide con **M** se llama* automorfismo. *Si la correspondencia es biunívoca entre **L** y **M**, se llama* isomorfismo. *Si los correspondientes de $x_1 \,.\, x_2$ y $x_1 + x_2$ son, respectivamente $y_1 + y_2$ y $y_1 \,.\, y_2$, se llama* isomorfismo dual *o* inverso *o* anti–isomorfismo.

En este estudio hay un caso de homomorfismo que tiene importancia y que llamaremos *homomorfismo reductor* o *homomorfismo–R*.

Definición 8 *Se llama* homomorfismo–R *u* homomorfismo reductor, *entre los reticulados* ***L*** *y* ***M****, a un homomorfismo tal que* ***M*** *tiene* menos elementos *que* ***L****. Un reticulado que carece de homomorfismo–R no trivial se llama* irreductible.

Intuitivamente, un reticulado irreductible no se puede poner en correspondencia con otro más simple, manteniendo las propiedades lógicas. Así por ejemplo, el reticulado *yin–yang* de la Figura 1 posee un homomorfismo–R, $\mathbf{H}_r$, dado por las correspondencias:

$\mathbf{H}_r$: 0, *yin* $\rightarrow$ 0' $\mathbf{H}_r$: *yang*, 1 $\rightarrow$ 1'.

Este homomorfismo–R transforma el reticulado *yin–yang* en el reticulado de la lógica binaria 0', 1' y mantiene las operaciones . y +. El reticulado *yin–yang* es reductible. Por el contrario, el reticulado hegeliano de la Figura 2 es irreductible. En la Figura 7 se presenta un reticulado que también posee un homomorfismo–R.

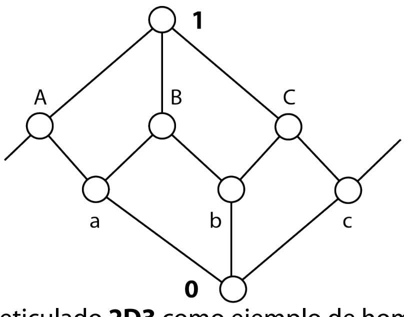


Figura 7: El reticulado **2D3** como ejemplo de homomorfismo.

Este homomorfismo $\mathbf{H}_r$ está dado por las siguientes correspondencias:

$\mathbf{H}_r$: $0, b, c, C \rightarrow 0'$ $\mathbf{H}_r$: $a, A, B, 1 \rightarrow 1'$.

A título de ejemplo, $1 = A + B \rightarrow A' + B' = 1'$, $a = A\,.\,B \rightarrow A'\,.\,B' = 1'$ y así los demás casos posibles. El estudio en general de los homomorfismos de los reticulados dialécticos escapa a los alcances de este estudio.

Dados dos reticulados se puede definir el *producto directo*, *producto cartesiano* o simplemente *producto* de reticulados que queda definido como:

> **Definición 9** *Sean* $\boldsymbol{L}_1, \cdots, \boldsymbol{L}_s$ *s reticulados. El producto directo (o cartesiano)* $\boldsymbol{L}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{L}_s$ *se define como el reticulado formado por los elementos* $(a_1, \cdots, a_s)$*, una colección de elementos de los* s *reticulados, mediante la relación de orden:*
>
> $$(a_1, \cdots, a_s) \leq (b_1, \cdots, b_s)$$
>
> *si, para todo* i*, se cumple* $a_i \leq b_i$ *para los elementos de cada* $\boldsymbol{L}_i$*.*

El caso más conocido de este producto ocurre con el reticulado binario de dos elementos, la lógica booleana, ver Figura 11. En [16] se establece que toda lógica booleana de un número finito de elementos es una potencia $\mathbf{B}^n$ de la lógica booleana simple.

El producto de reticulados no posee demasiado interés para la dialéctica. Es claro que el producto cartesiano, por ejemplo, de $\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$ es homomorfo tanto a $\mathbf{L}_1$ como a $\mathbf{L}_2$. Los homomorfismos son muy simples: $\mathbf{H}_r$: $(a_1, a_2) \rightarrow a_1$ y similar para el índice 2.

Algunos reticulados de interés lógico

Existe un conjunto de reticulados y de funciones que poseen interés directo en este trabajo. Las siguientes definiciones introducen estos casos. A efectos de completar la notación, se designará como **Bn** o $\mathbf{B}^n = \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \cdots \times \mathbf{B}$ al reticulado booleano de orden n formado por el producto directo de n reticulados booleanos **B**.

Se llama reticulado de Lukasiewicz–Post, **Cn**, de orden n, a la cadena de n elementos entre 0 y 1. Los elementos tienen valores:

$$\frac{p}{n-1} \quad \text{donde} \quad p = 0, 1. \cdots, n-1.$$

Se trata de n racionales entre 0 y 1. En esta estructura se puede definir una negación lógica **N** que posee la propiedad:

$$\mathbf{N}\ \frac{p}{n-1} = \frac{n-1-p}{n-1}.$$

La lógica así construida se encuentra definida en [57, 58, 80]. En esta lógica Lukasiewicz incluye dos funciones modales: *certidumbre* (*Gewissheit*) y *posibilidad* (*Möglichkeit*).[105] Estos agregados no ilustran demasiado lo que sucede en las dialécticas naturales o las propuestas en este trabajo.

En la lógica ternaria de Hans Reichenbach (1891, 1953) [48, 49] se consideran tres funciones que se llaman negaciones, sobre el reticulado **C3**. La función "cíclica" intercambia todos los elementos y es similar a la primera de las funciones negación que introduce Post [80] en **Cn**. Evidentemente no se cumple con la propiedad de Augustus De Morgan (1806, 1871). La "negación completa" de Reichenbach carece de función inversa y tampoco cumple con De Morgan. Finalmente, la "negación diametral" es una negación según la definición de Lukasiewicz. Tanto Lukasiewicz [57] como Post [80], en su segunda definición, coinciden con la definición de Lukasiewicz de negación en **Cn**.

Los reticulados dialécticos

Los reticulados dialécticos –definidos de una manera imprecisa– son reticulados que poseen dos propiedades básicas:

- Una *rotación* que lo transforma en sí mismo, un *automorfismo*.
- Un *anti–isomorfismo* que transforma $x+y$ en $x' \,.\, y'$ y dualmente, donde se indica con x', y' a los correspondientes de x, y.

El conjunto más importante de reticulados dialécticos lo constituye los reticulados irreductibles. Sin embargo, los que son reducibles también poseen interés en algunos casos, por esta razón no se exige en la definición de reticulado dialéctico que tengan esta propiedad.

105 Si d designa a un valor intermedio entre 0 y 1, Lukasiewicz define como $G(0) = 0, G(d) = 0, G(1) = 1$ y $M(0) = 0, M(d) = 1, M(1) = 1$, respectivamente *Gewissheit* y *Möglichkeit*.

Consideremos los reticulados que generan una lógica dialéctica, no booleana. Comencemos por la definición general de un reticulado dialéctico. De acuerdo con esto resultan las siguientes definiciones.

Definición 10 *Se llama* reticulado dialéctico *de* rango 1 *y de* orden n, ***Dn****, al reticulado formado por los valores extremos* 0 *y* 1 *y* n *átomos,* d_i*, que verifican* $0 < d_i < 1$ *y son llamados* elementos dialécticos.

Estos reticulados poseen una importancia grande en este trabajo. Por definición ocurren los siguientes casos:

D0 = **B** = **C2**, dialéctico de orden 0, definido por abuso de lenguaje como coincidente con el reticulado booleano simple o binario o como la cadena mínima de Lukasiewicz.

D1 = **C3**, coincide con la cadena de orden 3 de la lógica de Lukasiewicz.

D2 = $\mathbf{B}^2$, coincide con el reticulado booleano de orden 2 y con la dialéctica *yin–yang*, Figura 1.

D3, reticulado dialéctico de Hegel, el caso básico de la lógica dialéctica, Figura 2.

D4, reticulado dialéctico de orden 4, coincide con los elementos jonios, Figura 3.

D5, reticulado dialéctico de orden 5, coincide con los elementos chinos, Figura 5.

El reticulado **2D4**, Figura 4, integra una serie más compleja de reticulados dialécticos. De inmediato se puede extender esta situación a un caso más general.

Definición 11 *Se llama* reticulado dialéctico *de rango r y orden $n > r$, **rDn**, al reticulado formado por los elementos extremos* 0, 1 *y r colecciones de n elementos 0 $< d_{i,j} <$ 1, llamados* dialécticos. *Se cumple la relación de orden $d_{i,j} < d_{i+1,j-1}$ y $d_{i,j} < d_{i+1,j}$. Con $i = 1, \cdots, r$ y los índices $j = 0, \cdots, n-1$ se consideran módulo n. No son reticulados los que cumplen con las condiciones del Teorema 4.*

De acuerdo con esta definición, los reticulados **Dn** también podrían designarse como **1Dn**. Simplemente es preferible usar una notación más breve. Por otra parte, estos reticulados tienen propiedades –por coincidir átomos y máximos– que los hacen diferentes y exige que las demostraciones de algunos teoremas sean diferentes.

Las definiciones de los reticulados dialécticos contienen los elementos identificados como característicos de la lógica dialéctica. Por tratarse de un reticulado, existe una relación de orden entre sus elementos. Posee rotaciones R_k que cumplen $R_k\, d_{i,j} = d_{i,j+k}$, donde la suma $j + k$ es módulo n. La definición se puede generalizar más todavía aumentando el número de índices: el primero es el rango r y los siguientes son de orden n. Las operaciones sobre los índices son módulo n.

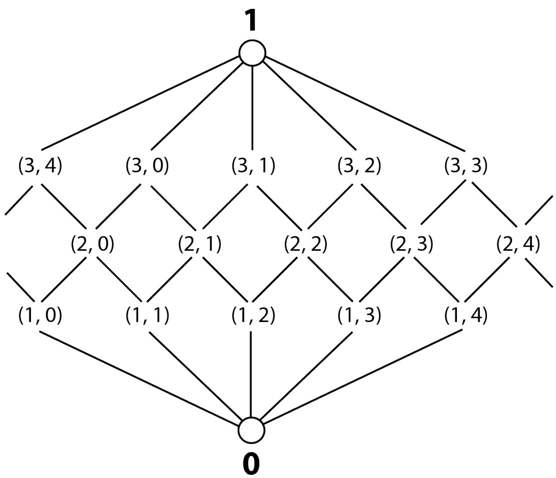


Figura 8: Dialéctica **3D5** como ejemplo del caso general.

A los efectos de ilustrar las ideas, en la Figura 8 se presenta el reticulado **3D5**.

Es inmediato que este reticulado posee n automoformismos que coinciden con las rotaciones de los n átomos. También posee las propiedades siguientes, de demostración inmediata.

Teorema 2 *Todo reticulado dialéctico **rDn** posee las siguientes propiedades:*

- *Posee n átomos, $d_{1,j}$, y n máximos, $d_{r,j}$. El producto de dos átomos es 0 y las suma de dos máximos es 1.*
- *La suma $d_{i,j} + d_{i,j+1}$ de dos elementos contiguos es $d_{i+1,j}$ y el producto $d_{i,j} \,.\, d_{i,j+1}$ de dos elementos contiguos es $d_{i-1,j+1}$, todas las operaciones son módulo n.*
- *Posee una rotación definida como $R_1\, d_{i,j} = d_{i,j+1}$ (la suma se considera módulo n) y todas la aplicaciones sucesivas de esta transformación, también son rotaciones.*
- *Todo elemento $i,\ j$ es igual a la suma de los átomos del reticulado que le son menores y el producto de los máximos que son mayores, en ambos casos se consideran las operaciones básicas del reticulado.*

Demostración. Estos resultados son inmediatos a partir de la Definición 10. □

Existe una propiedad muy simple que poseen los reticulados dialécticos que establece el siguiente teorema.

Teorema 3 *En un reticulado **rDn**, $r > 1$, todo máximo es la suma de r átomos. La condición necesaria y suficiente para que exista un máximo D y un átomo d tales que $D \,.\, d = 0$ y $D + d = 1$ es que $n > r$. La propiedad también se cumple en forma dual, intercambiando máximos y átomos.*

Demostración. Consideremos los átomos menores a un máximo $(r, 0)$, ver Figura 8. Es inmediato que son: $(1, 0) \cdots (1, r-1)$, r átomos en total. Para que exista un átomo que sume 1 con este máximo debe existir, al menos, un átomo adicional y esto solamente ocurre si $n-1 \geq r$ o sea, si $n \geq r+1$. Estos átomos cumplen también la condición del producto. La diferencia $n-r$ es el número de átomos que cumplen esta propiedad y por lo tanto no son menores que el máximo considerado. El caso dual se demuestra de la misma manera. □

Teorema 4 *Las estructuras* **rDn**, *con* n *par,* no son reticulados *si cumplen con* $2(r-1) \geq n$.

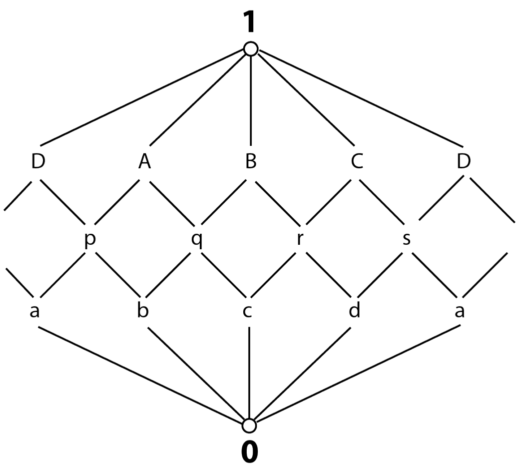


Figura 9: Estructura **3D4** como ejemplo de no reticulado.

Demostración. Para fijar las ideas consideremos la Figura 9 con la estructura **3D4**. Puede advertise de inmediato que existe dos valores para la suma $a + c = A, C$, por ejemplo, algo que no es aceptable en un reticulado. En forma dual, también existen dos valores para el producto $B \,.\, D = b, d$, por ejemplo. En general, esto ocurre en las estructuras con n par y donde hay dos conjuntos de r átomos que completan el período n de la suma de los índices correspondientes, o sea, la condición $2(r-1) = n$. Consideremos como ejemplo **4D6**.

En este caso, r átomos consecutivos suman un máximo y se repite el mismo caso de doble resultado de la suma. Más aún, esto también ocurre en **5D6** donde no solamente 4 átomos tienen doble suma, también la tienen 4 elementos de nivel lógico 2, ver Definición 12, y, en forma dual, los productos correspondientes. Así ocurre que para todo r tal que $2(r-1) \geq n$ siempre que además sea $r < n$ aparecen las dobles sumas y productos y no son reticulados. En el Cuadro 2 se presentan las *estructuras que no son reticulados.* □

Cuadro 2: Ejemplos de no reticulados.

n	**r**	**casos**
4	3	**3D4**
6	4	**4D6**, **5D6**
8	5	**5D8**, **6D8**, **7D8**
10	6	**6D10**, **7D10**, **8D10**, **9D10**
…	…	…

Estos casos de falsos reticulados crearían una dialéctica en la cual pueden existir dos conclusiones, de igual nivel lógico –ver la Definición 12– a partir de las mismas premisas. Esta dialéctica podría tener interés y también algunas aplicaciones en la ciencia, pero en este estudio no se avanza en esta dirección.

Una noción importante para la dialéctica es el *nivel lógico* de un elemento que se relaciona con el "grado de verdad" o proximidad a 1 que posee un elemento.

Definición 12 *Se llama* nivel lógico *de un elemento $d_{i,j}$ del reticulado* ***rDn*** *–llamados genéricamente* elementos dialécticos *del reticulado– al número i. Los elementos dialécticos de* ***Dn*** *poseen nivel lógico 1.*

A partir de esta definición resulta un teorema básico del automorfismo.

Teorema 5 *Un automorfismo transforma un elemento de un reticulado dialéctico en otro elemento de* igual nivel lógico. *Esta relación es una relación de equivalencia.*

Demostración. El nivel lógico s del elemento $d_{s,t}$ permite construir una cadena del tipo $0 < d_{1,p} < d_{1,q} < \cdots < d_{s,t}$ con elementos contiguos. Recíprocamente, si la cadena existe, el nivel lógico es s. El automorfismo transforma esta cadena en otra con el mismo número de elementos y las mismas relaciones, luego conserva el nivel lógico. Los automorfismos de un reticulado forman un *grupo*. Luego $a = I\, a$, donde I es el automorfismo identidad. Si A es un automorfismo y $b = A\, a$ entones $a = A^{-1}\, b$. Si $b = A_1\, a$ y $c = A_2\, b$ entonces $c = A_2\, A_1\, a$. Se cumplen las tres condiciones de la equivalencia, idempotencia (I), conmutativa (C) y transitiva (T), luego está demostrado. □

Teorema 6 *Si dos elementos diferentes de un reticulado dialéctico poseen el mismo nivel lógico, entonces* no son comparables.

Demostración. Por la definición del reticulado, para que dos elementos a, b sean comparables –esto es, se vinculen entre sí como $a \leq b$ o a la inversa– es necesario que tengan diferente el primer índice, o sea, el nivel lógico. □

Definición 13 *Un elemento $d_{s,i}$ de un reticulado **rDn**, donde $r = 2s - 1$, se llama* elemento central *del reticulado.*

Los elementos centrales poseen una cadena de s elementos hasta el 0 y también s elementos hasta el 1, por eso son llamados centrales. En la Figura 8 los elementos (2, i) son elementos centrales.[106] En el ejemplo hegeliano los tres elementos t, a, s son valores centrales. Por el contrario, en el reticulado de la Figura 4 no existen valores centrales.

El rango r de los reticulados **rDn** determina un tipo de dialéctica. Existe una única dialéctica de rango cero y es la lógica binaria. Hay una infinidad de las demás dialécticas según su número de átomos, pero cada rango determina una familia con propiedades diferen-

[106] Si existe una negación N de modo que se verifica la ecuación $N\, x = x$, entonces x es un elemento central, tal como ocurre con todos los elementos de **Dn**. Como es claro, si una negación tiene esta propiedad, no es una negación en sentido estricto.

tes. Las dialécticas de rango 1 las podemos llamar hegelianas o simples y son útiles para analizar los problemas de contrarios y del devenir. Las dialécticas de rango 2 permiten analizar los problemas del materialismo histórico relacionados con la lucha de clases. Las dialécticas de rango 3 permiten analizar algunos problemas de las teorías científicas y los problemas del materialismo histórico relacionados con la sucesión de los modos de producción. Es posible que haya interés en rangos mayores que 3 para algunos problemas científicos, epistemológicos o de la evolución de las especies, pero este estudio no considera en detalle a las lógicas de estos rangos.

Se puede extender la noción de reticulados complejos a reticulados dialécticos que poseen tres o más índices, los primeros hacen referencia al nivel lógico y el último a la cantidad de elementos de igual nivel. Es posible que sean de utilidad para comprender la lógica de las teorías científicas, pero este tema solamente está sugerido en este estudio.

La colección de reticulados definidos comprende los casos de interés que se mencionaban al principio de esta sección. A efectos de visualizar correctamente las relaciones mutuas se presenta un diagrama bidimensional, Cuadro 3. No están en negrita los que cumplen con el Teorema 4 y, por lo tanto, no son reticulados.

Cuadro 3: Reticulados dialécticos según rango y número de átomos.

r / n	1	2	3	4	5	6	7	…
0	**C2 = B=0D1**							
1	*C3 = 1D1*	**B**^{2} = **1D2**	**1D3**	**1D4**	**1D5**	**1D6**	**1D6**	…
2	*C4 = 2D1*		**2D3**	**2D4**	**2D5**	**2D6**	**2D7**	…
3	*C5 = 3D1*			3D4	**3D5**	**3D6**	**3D7**	…
4	*C6 = 4D1*				**4D5**	4D6	**4D7**	…
5	…					5D6	**5D7**	…
6	…						**6D7**	…

En este cuadro se relacionan los diferentes reticulados. A medida que nos desplazamos en sentido horizontal, aumenta la cantidad de átomos y de elementos que existen. A medida que nos desplazamos en la vertical, aumenta el rango y es posible disponer de más valores lógicos entre "falso" y "verdadero", que llamamos, genéricamente, elementos *dialécticos*.

Como es natural, también puede definirse reticulados dialécticos infinitos **rD**∞ que tienen interés en algunos procesos sin fin, como es el caso del río de Erakleitos, página 59, por ejemplo.

Reticulados dialécticos y automorfismos

Los automorfismos en los reticulados dialécticos –excepto los **Dn**– están formados por dos familias: la rotaciones y las simetrías. La rotaciones están definidas en el Teorema 2, en esta sección nos ocuparemos de las simetrías. En los reticulados **Dn** toda permutación de los elementos es un automorfismo.

En los reticulados **2Dn** se cumple el siguiente teorema. Empleamos la *notación matemática* que emplea d_i para los átomos y D_i para los máximos. El siguiente teorema muestra que existen $2n$ automorfismos en el reticulado.[107] Hay n rotaciones y otras tantas simetrías.

Teorema 7 *Las* simetrías S_j *en **2Dn** cumplen las ecuaciones* $S_j\, d_i = d_{n-i+j}$ *y* $S_j\, D_i = D_{n-i+j-1}$*, las operaciones son módulo* n.

Demostración. Solamente es necesario verificar las propiedades para las sumas de los átomos o el producto de los máximos contiguos. Consideremos dos átomos contiguos $d_i + d_{i+1} = D_i$, aplicando la simetría se obtiene $S_j(d_i + d_{i+1}) = S_j\, D_i = D_{n-(i+1)+j}$. Pero $S_j\, d_i = d_{n-i+j}$ y $S_j\, d_{i+1} = d_{n-(i+1)+j}$, luego $S_j\, d_i + S_j\, d_{i+1} = d_{n-i+j} + d_{n-(i+1)+j}$. Como estos dos átomos son contiguos, su suma tiene el índice del menor índice de los sumandos, luego es $D_{n-(i+1)+j}$ y se cumple la condición del automorfismo de la suma. En forma dual, consideremos dos máximos contiguos $D_i\, .\, D_{i+1} = d_{i+1}$, aplicando la simetría se obtiene $S_j(D_i\, .\, D_{i+1}) = S_j\, d_{i+1} = d_{n-(i+1)+j}$. Pero $S_j\, D_i = D_{n-i+j-1}$ y $S_j\, D_{i+1} = D_{n-(i+1)+j-1}$. Como estos dos máximos son contiguos, su producto tiene el índice del mayor índice de los mutiplicandos, luego es $d_{n-i+j-1} = d_{n-(i+1)+j}$ y se cumple la condición del automorfismo del producto. $\square$

[107] Este resultado se ha comprobado directamente por un programa que buscaba todos los casos posibles de automorfismo.

El siguiente teorema analiza el producto de dos simetrías.

Teorema 8 *Dos* simetrías S_j, S_k *en* ***2Dn*** *cumplen la ecuación del producto –aplicación sucesiva de cada una–* $S_jS_k = R_{j-k}$*, donde* R *es la rotación del reticulado.*

Demostración. Consideremos un átomo, se obtiene $S_k\, d_i = d_{n-i+k}$. Aplicando la otra simetría $S_j\, d_{n-i+k} = d_{n-(n-i+k)+j} = d_{i+j-k}$, o sea $R_{j-k}\, d_i$ tal como se debía demostrar. Consideremos un máximo, se obtiene $S_k\, D_i = D_{n-i+k-1}$. Luego $S_j\, D_{n-i+k-1} = D_{n-(n-i+k-1)+j-1} = D_{i-k+j} = R_{j-k}\, D_i$ como se debía demostrar. □

Como consecuencia de este teorema resulta que $S_jS_j = R_0 = I$, la identidad. Las simetrías son involutorias, tal como su nombre sugiere. El siguiente teorema presenta el producto de una simetría y una rotación.

Teorema 9 *Consideremos una rotación* R_j *y una simetría* S_k *en* ***2Dn****, cumplen con las ecuaciones del producto –aplicación sucesiva–* $S_kR_j = S_{k-j}$ *y* $R_jS_k = S_{j+k}$.

Demostración. Consideremos un átomo, $R_j\, d_i = d_{i+j}$. Aplicando la simetría resulta $S_k\, d_{i+j} = d_{n-(i+j)+k} = d_{n-i+(k-j)} = S_{k-j}\, d_i$. Considerando un máximo, $R_j\, D_i = D_{i+j}$, aplicando la simetría resulta $S_k\, D_{i+j} = D_{n-(i+j)+k-1} = D_{n-i+(k-j)-1} = S_{k-j}\, D_i$, luego está demostrada la primera igualdad. En el orden inverso resulta $S_k\, d_i = d_{n-i+k}$. Aplicando la rotación resulta $R_j\, d_{n-i+k} = d_{n-i+k+j} = S_{j+k}\, d_i$. Considerando un máximo, $S_k\, D_i = D_{n-i+k-1}$. Aplicando la rotación resulta $R_j\, D_{n-i+k-1} = D_{n-i+j+k-1} = S_{j+k}\, D_i$, luego está demostrada la segunda igualdad. □

Este teorema muestra que $R_jS_kR_j = R_jS_{k-j} = S_{k-j+j} = S_k$ para cualquier rotación del reticulado. También se obtiene $S_j = R_jS_0$ que permite obtener todas las simetrías del reticulado.[108]

[108] Estos resultados tiene interés para el estudio del grupo de los automorfismos, tema que no analizado en detalle en este trabajo.

El siguiente teorema muestra que existen $2n$ automorfismos en el reticulado **3Dn**:[109] hay n rotaciones y otras tantas simetrías, igual que en el caso anterior.

Teorema 10 *Las* simetrías S_j *en **3Dn** cumplen las ecuaciones* $S_j\, d_i = d_{n-i+j}$, $S_j\, C_i = C_{n-i+j-1}$ *y* $S_j\, D_i = D_{n-i+j-2}$, *las operaciones son módulo* n.

Demostración. Las demostraciones para las sumas de los átomos o el producto de los máximos contiguos –donde resulta un elemento central– es la misma que en el caso del Teorema 7 [110], solamente se debe analizar el caso de sumas y productos de elementos centrales. Consideremos dos elementos centrales contiguos $C_i \,.\, C_{i+1} = d_i$, aplicando la simetría se obtiene $S_j(C_i \,.\, C_{i+1}) = S_j\, d_{i+1} = d_{n-i-1+j}$. Pero $S_jC_i = C_{n-i+j-1}$ y $S_jC_{i+1} = C_{n-(i+1)+j-1}$, luego $S_jC_i \,.\, S_jC_{i+1} = C_{n-i+j-1} \,.\, C_{n-(i+1)+j-1} = d_{n-i+j-1}$, luego está demostrado. La suma de dos elementos centrales contiguos es $C_i + C_{i+1} = D_i$, aplicando la simetría se obtiene $S_j(C_i + C_{i+1}) = S_jD_i = D_{n-i+j-2}$. Pero $S_jC_i = C_{n-i+j-1}$ y $S_jC_{i+1} = C_{n-(i+1)+j-1}$, luego $S_jC_i + S_jC_{i+1} = C_{n-i+j-1} + C_{n-(i+1)+j-1} = D_{n-(i+1)+j-1} = D_{n-i+j-2} = S_jD_i$ con los cual queda demostrado el teorema. □

El siguiente teorema analiza el producto de dos simetrías.

Teorema 11 *Dos* simetrías S_j, S_k *en **3Dn** cumplen la ecuación del producto –aplicación sucesiva de cada una–* $S_jS_k = R_{j-k}$, *donde* R *es la rotación del reticulado.*

Demostración. La demostración para los átomos y los elementos centrales coincide con la realizada en el Teorema 8 para átomos y máximos puestos que las ecuaciones son iguales. Basta demostrarlo para los máximos. Consideremos un máximo, se obtiene $S_k\, D_i = D_{n-i+k-2}$.

[109] Este resultado se ha comprobado directamente por un programa que buscaba todos los casos posibles de automorfismo.

[110] El hecho que las ecuaciones tengan un sumando constante en el caso de los máximos y elementos centrales no cambia nada en la demostración.

Luego $S_j\, D_{n-i+k-2} = D_{n-(n-i+k-2)+j-2} = D_{i-k+j} = R_{j-k}\, D_i$ como se debía demostrar. □

Como consecuencia de este teorema resulta que $S_j S_j = R_0 = I$, la identidad. Las simetrías son involutorias, tal como su nombre sugiere. El siguiente teorema presenta el producto de una simetría y una rotación.

Teorema 12 *Consideremos una rotación R_j y una simetría S_k en **3Dn**, cumplen con las ecuaciones del producto –aplicación sucesiva– $S_k R_j = S_{k-j}$ y $R_j S_k = S_{j+k}$.*

Demostración. La demostración es similar a los casos anteriores y se omite por brevedad. □

Los teoremas anteriores de automofismos en **2Dn** y **3Dn** poseen demostraciones similares. Esto permite afirmar que los teoremas son válidos para **rDn** –con $r > 1$– con carácter general.

Conos e intervalos

En el análisis de los reticulados dialécticos es necesario introducir algunas nociones nuevas.

Definición 14 *Dos elementos a, b de un reticulado **L** permiten definir los siguientes conjuntos de elementos:*

1. Cono*: conjunto de elementos x que cumplen $x \geq a$;*
2. Cono invertido*: conjunto de elementos y que cumplen $y \leq b$;*
3. Intervalo*: conjunto de elementos z que cumplen $a \leq z \leq b$.*

Estas definiciones son próximas a las definiciones de *ideal* e *ideal dual* en la teoría de reticulados.[111] En la Figura 10 se presentan ejem-

[111] La definición de ideal es: Se llama *ideal* de un reticulado **L** a un subconjunto de elementos **S** tal que si $x, y \in$ **S**, entonces $x + y \in$ **S**; si $z \leq x$ entonces $z \in$ **S**. La definición dual es: Se llama *ideal dual* de un reticulado **L** a un subconjunto de elementos **S** tal que

plos de los tres tipos de elementos definidos. Se representa el cono $x \geq a$, los conos invertidos $y \leq B$ y $y \leq C$ y los intervalos $a \leq x \leq B$, $a \leq x \leq C$ y su intersección, que también es un intervalo.

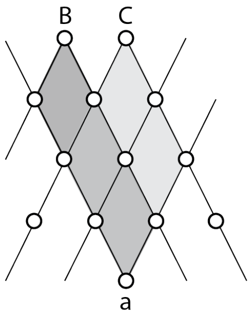


Figura 10: Conos, conos invertidos e intervalos del reticulado.

Como ejemplo, un cono en **Dn** es el conjunto formado por **S** $= (b, 1)$. En forma similar, en **2Dn**, Figura 7, **S** $= (b, B, 1)$ también es un cono y en **3Dn**, Figura 9, **S** $= (a, p, A, 1)$ también lo es.

Sobre estos elementos se cumple el siguiente teorema.

Teorema 13 *En un reticulado **L**, los conos, conos invertidos e intervalos son sub–reticulados de **L**.*

Demostración. Consideremos el caso de un cono de vértice a. Si x, y son dos elementos del cono se cumple $x \geq a$ y $\geq a$, luego $x + y \geq a$ y también $x \,.\, y \geq a$ por las propiedades de monotonía. En forma dual se cumple para el cono invertido y, como consecuencia de ambos resultados, vale para el intervalo. □

si $x, y \in$ **S**, entonces $x \,.\, y \in$ **S**; si $z \geq x$ entonces $z \in$ **S**.

La negación

Funciones monótonas y monótonas inversas

Las nociones de funciones con monotonía o monotonía inversa son ideas previas para el estudio de las negaciones.

Definición 15 *Una función* $f(x)$ *definida en un reticulado se llama* monótona *si para* $x \leq y$*, pertenecientes al reticulado, entonces* $f(x) \leq f(y)$*; se llama* monótona inversa *si* $f(x) \geq f(y)$.

También se suele hablar de que la función *conserva* o *invierte* el orden en el reticulado como expresiones equivalentes a la monotonía. El concepto de *automorfismo* está relacionado estrechamente con el concepto de monotonía: el automorfismo conserva el orden en el reticulado. Por esta estrecha vinculación se puede demostrar el teorema siguiente.

Teorema 14 *Si una transformación de un reticulado **L** en **L**, posee inversa y es monótona, es un automorfismo.*

Demostración. Sea A la transformación y A^{-1} su inversa, ambas que conservan el orden. Puesto que se tiene para todo par de elementos del reticulado $x+y \geq x$ sigue de la monotonía $A(x+y) \geq A\,x$. En forma similar se obtiene $A(x+y) \geq A\,y$ y por la monotonía de la suma, se tiene $A(x+y) \geq A\,x + A\,y$. Si aplicamos esta ecuación a A^{-1} sobre los valores $A\,x, A\,y$ se tiene $A^{-1}\,(A\,x + A\,y) \geq A^{-1}\,A\,x + A^{-1}\,A\,y = x + y$ y aplicando A a esta ecuación resulta $A\,x + A\,y \geq A(x+y)$ y de aquí, como resultado final se obtiene $A(x+y) = A\,x + A\,y$. En forma dual se demuestra la ecuación del producto y queda demostrado el teorema. □

Teorema 15 *La inversa de una función $f(x)$ monótona (inversa) es una función monótona (inversa).*

Demostración. Para $x \leq y$, si $f^{-1}(x)$ y $f^{-1}(y)$ no fueran comparables, tampoco lo serían x e y. Consideremos el caso de una función monótona, en el caso inverso la demostración es igual. Si ocurriera que $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ aplicando la función monótona f se obtiene $x \geq y$ en contra de la hipótesis. □

Nociones intuitivas sobre la negación

La presentación de las dialécticas naturales y lo que conocemos de la lógica binaria descansa en la noción de *negación*. Según el análisis general que hemos introducido, esta noción debe definirse en un reticulado. Investigaremos entonces ¿en qué consiste una negación?

En las lógicas técnicas suele omitirse la noción de negación porque la mayoría de las veces no tiene aplicación. En los intentos de generalización de lógicas multivaluadas, la negación suele definirse en forma explícita, sin referencia a una propiedad formal, mediante una ecuación que aparece como arbitraria. Es habitual, sin embargo, que estas definiciones cumplan con la propiedad de De Morgan a pesar que no se considerara que esta propiedad represente un aspecto esencial de la negación.

Puede parecer, a primera vista, que una negación debe ser definida por su *significado*, pero no es así. Esta opinión se origina en una confusión de conceptos en que es muy fácil incurrir. La negación es una operación lógica y debe ser definida solamente por sus *propiedades formales*. Existen cuatro conceptos dialécticos que se encuentran relacionados, pero que son diferentes. En primer lugar, existe el concepto de *negación*. En segundo lugar, existe el concepto de *contrarios lógicos*. En tercer lugar existe el concepto de *contrarios materiales*. Finalmente, para cerrar el panorama, existe el concepto de *penetración de contrarios* o de *unidad y lucha de contrarios*.

En las formulaciones imprecisas de la dialéctica se suelen confundir estas ideas diferentes. Un primer paso para precisar el contenido lógico consiste en separarlas. Nos ocuparemos en esta sección del significado de las dos primeras. Más adelante se aclaran los conceptos de contrarios materiales y de penetración de contrarios.

Las propiedades formales de la negación

La noción de negación extiende una idea desarrollada en la lógica booleana. La negación es una operación *unaria*, definida sobre todos los elementos del reticulado. Si x es un elemento del reticulado **L**, se empleara la notación $N\,x$ para designar una negación de x. Emplearemos esta notación porque en un reticulado dialéctico existen *más de una negación* y por esta razón no es conveniente emplear el clásico símbolo $\neg\,x$. Las diferentes negaciones se escriben como $N_1, N_2, \cdots$.[112]

Si tomamos un valor lógico y procedemos a aplicar en forma sucesiva una negación, se obtiene una serie de valores lógicos que, en algún momento, debe regresar sobre sí misma y *conducir al valor lógico de partida*. Ésta es una generalización de la negación de la negación hegeliana. Esta exigencia traduce la propiedad de la doble negación que en la lógica booleana coincide con la afirmación y de la triple negación que en la dialéctica hegeliana conduce, de alguna manera, al punto de partida. Por esta razón, las negaciones son operaciones unarias *con inversa*. La función inversa de N se indicará N^{-1}.

La exigencia de que la negación posea una inversa la caracteriza muy poco desde el punto de vista algebraico. Existe otra propiedad lógica que es fundamental desde el punto de vista formal: *la propiedad de De Morgan*. Esta propiedad existe en el universo de las proposiciones, antes de aplicar el homomorfismo–R. La propiedad es empleada

[112] La multiplicidad de negaciones es algo corriente en las lenguas naturales. Pensemos en la idea de "contrario". Es claro que dado un elemento o una acción cualquiera, hay una cantidad de contrarios posibles. Así por ejemplo, ¿cuál es el contrario de vida? De inmediato se puede elaborar una lista: muerte, estado en coma, alma en pena, alma condenada, alma en el paraíso, reencarnación. Según sea la creencia que se posee sobre la vida habrá diferentes contrarios. El contrario de amor permite también elaborar una lista larga: odio, asceta religioso, fuera de sus cabales, muerto y muchas otras posibilidades.

en forma espontánea por el pensamiento humano.[113] Con la propiedad de De Morgan queda completamente caracterizada la negación.

Definición 16 *Una negación N en un reticulado es una operación unaria, con inversa, que cumple con la propiedad de De Morgan: $N(x+y) = Nx \,.\, Ny$ y también $N(x \,.\, y) = Nx + Ny$.*

La propiedad de De Morgan define un anti–isomorfismo en el reticulado. Indica que se posee una cierta "simetría" dentro de la estructura de los valores lógicos. Se vincula también con una propiedad de conservación del orden definido en el reticulado.

Teorema 16 *Toda negación N definida en un reticulado es una función* monótona inversa *(o que invierte el orden).*

Demostración. Si una función cumple con la propiedad de De Morgan para dos valores lógicos que verifiquen $x \leq y$ se obtiene, aplicando las propiedades elementales $x + y = y$ y también $x \,.\, y = x$. Aplicando la propiedad de De Morgan a las expresiones anteriores resulta $N\,x \,.\, N\,y = N\,y$ y también $N\,x + N\,y = N\,x$ y de cualquiera de estas dos expresiones resulta de inmediato que $N\,y \leq N\,x$ tal como se debía demostrar. $\square$

Teorema 17 *Si una función $f(x)$ posee inversa e invierte el orden en un reticulado, entonces $N\,x = f(x)$ es una negación.*

Demostración. Consideremos dos elementos del reticulado. Puesto que se tiene $x + y \geq x$, por la propiedad de monotonía inversa se llega a $f(x+y) \leq f(x)$ y de $x + y \geq y$ se obtiene $f(x+y) \leq f(y)$.

[113] Como ejemplo, es interesante observar que la propiedad de De Morgan existe en el español como un hecho natural y extraordinariamente preciso. En efecto, la negación de la frase "o A o B" es la frase "ni A ni B" que expresa la propiedad de De Morgan, si entendemos que "ni" es una contracción de "no y". En otros idiomas la vinculación no es tan perfecta.

De la monotonía del producto se tiene $f(x + y) \leq f(x) \,.\, f(y)$. En forma dual se demuestra $f(x \,.\, y) \geq f(x) + f(y)$. Consideremos ahora f^{-1}, inversa de f, que también es monótona inversa, y apliquemos a $f(x)$ y $f(y)$ esta propiedad, resulta $f^{-1}(f(x) \,.\, f(y)) \geq f^{-1}(f(x)) + f^{-1}(f(y)) = x + y$. Apliquemos f a la fórmula, teniendo en cuenta la monotonía inversa, se obtiene $f(x) \,.\, f(y) \leq f(x + y)$. Combinando los resultados se obtiene $f(x) \,.\, f(y) = f(x + y)$, una de las ecuaciones de De Morgan. En forma dual se obtiene la otra propiedad y queda demostrado que f es una negación. □

Teorema 18 *Toda negación cumple con:* $N\,0 = 1$ *y* $N\,1 = 0$.

Demostración. Sea x un elemento del reticulado y sea $z = N^{-1}\,x$, se tiene entonces $0 \,.\, z = 0$, luego, para todo x, es $N\,0 + x = N\,0$. Reemplazando $x = 1$ resulta que $N\,0 = 1 + N\,0 = 1$. En forma dual se demuestra la otra igualdad. □

Este resultado permite adelantar un paso en la interpretación de los valores lógicos de un reticulado. Podemos asimilar el supremo del reticulado, 1, al valor lógico “verdadero” y el ínfimo, 0, al valor lógico “falso” exactamente igual que en la interpretación binaria clásica. Con esta presentación, el sub–reticulado formado por 0 y 1, con cualquier negación, no se puede diferenciar de la lógica binaria. Mediante este argumento se comienza a interpretar el significado de los valores lógicos del reticulado. Las negaciones definidas se comportan respecto a los valores “verdadero” y “falso” en la forma esperada.

Las negaciones incluyen algunos casos especiales, útiles para la lógica, que se denominan *negaciones estrictas*.

Definición 17 *Una negación* N *definida en el reticulado* **L** *se dice* negación estricta *si transforma todo elemento en un contrario estricto, es decir, si se cumple para todo* x*:* $x + N\,x = 1$ *y* $x \,.\, N\,x = 0$.

La negación hegeliana $(01)(t\,a\,s)$ es estricta. Se cumple el siguiente teorema.

Teorema 19 *La composición de negaciones posee las siguientes propiedades:*

1. *El producto de un número par de negaciones es un automorfismo en* **L***; el producto de un número impar de negaciones es una negación en* **L***.*

2. *Cada negación de* **L** *se puede obtener como el producto de una negación fija N_0 cualquiera, por cada automorfismo de* **L***.*

3. *Si N_1 y N_2 son dos negaciones en* **L** *entonces $N_3 = N_1^{-1}\, N_2\, N_1$ es una negación. Si N_2 es una negación estricta, entonces N_3 también lo es.*

4. *Si N es una negación y A un automorfismo, entonces $A^{-1}\, N\, A$ también es una negación. Si la negación es estricta, $A^{-1}\, N\, A$ también lo es.*

5. *Si N es una negación estricta, N^{-1} también lo es.*

Demostración. Lo demostraremos ordenadamente.

1. Esta afirmación es inmediata por las propiedades de monotonía.

2. Si consideramos una negación particular N_0 y una negación cualquiera N, es claro que $N = (N\, N_0^{-1})\, N_0$ donde $A = N\, N_0^{-1}$ es un automorfimo tal como se debía demostrar.

3. Por la propiedad 1, N_3 es una negación. También se puede demostrar directamente. Consideremos

$$\begin{aligned} N_3\,(x+y) &= N_1^{-1}\, N_2\, N_1(x+y) = N_1^{-1}\, N_2\,(N_1\, x\,.\, N_1\, y) = \\ &= N_1^{-1}\,(N_2\, N_1\, x + N_2\, N_1\, y) = \\ &= N_1^{-1}\, N_2\, N_1\, x\,.\, N_1^{-1}\, N_2\, N_1\, y = N_3\, x\,.\, N_3\, y. \end{aligned}$$

De igual manera se demuestra que $N_3(x\,.\,y) = N_3\, x + N_3\, y$. Si N_2 es una negación estricta, se tiene, para todo x que $x + N_2\, x = 1$. Multiplicando a la izquierda por N_1^{-1} y a la derecha por N_1 se tiene $x+N_1^{-1}\,N\,N_1\,x = 1$. Aplicando el razonamiento al caso dual queda demostrado.

4. $A^{-1}N\,A$ es una negación puesto que $A^{-1}N\,A(x+y) = A^{-1}N(A\,x+A\,y) = A^{-1}(N\,A\,x\,.\,N\,A\,y) = A^{-1}N\,A\,x\,.\,A^{-1}N\,A\,y$. En forma similar se demuestra para $x\,.\,y$. Es claro que $A\,x + N\,A\,x = 1$ si N es una negación estricta. Aplicando A^{-1} resulta $x + A^{-1}\,N\,A\,x = 1$. En forma similar se demuestra para $x\,.\,y$.

5. N^{-1} es una negación estricta puesto que $x + N\,x = 1$, luego, aplicando la negación N^{-1} resulta $N^{-1}x\,.\,x = 0$ y en forma similar se demuestra el caso dual $N^{-1}x + x = 1$.

Con esto quedan demostrados todos los casos. □

Definición 18 *Se llama grado de una negación N al menor número de veces que es necesario aplicar N para obtener la transformación idéntica. El grado es un número par.*

Por ejemplo, en el reticulado hegeliano **D3** la negación (0 1)(t a s) es de grado 6 pero la negación (0 1)(t a) es de grado 2. No todas las negaciones de un reticulado poseen el mismo grado.

Teorema 20 *En un reticulado **rDn** todas las negaciones de un elemento de nivel lógico s son elementos de nivel lógico $r - s + 1$.*

Demostración. Consideremos un elemento $d_{s,t}$ del reticulado. Sea la cadena:

$$0 < d_{1,p} < d_{2,q} < \cdots < d_{s,t} < d_{s+1,u} < \cdots d_{r,z} < 1.$$

Esta cadena tiene $s - 1$ elementos contiguos entre 0 y el elemento $d_{s,t}$ y $r - s$ elementos hasta el 1, en total hay r elementos dialécticos. Aplicando una negación N queda:

$$1 > N\,d_{1,p} > N\,d_{2,q} > \cdots > N\,d_{s,t} > N\,d_{s+1,u} > \cdots > N\,d_{r,z} > 0.$$

Luego $N\,d_{s,t}$ tiene elementos $r - s$ hasta el 0, por lo tanto su nivel lógico es $r - s + 1$ como se debía demostrar. □

Como corolario de este teorema se obtiene que si se cumple $r = 2s - 1$ entonces la negación de un elemento central de nivel lógico s, es también de nivel s.

Contrarios dialécticos

Es necesario diferenciar la noción de *contrarios* con la de *contrarios estrictos*, así como se diferencia entre la *negación* y la *negación estricta*.

Definición 19 *El elemento* y *de un reticulado dialéctico se llama* contrario simple *o* contrario *a secas, si existe* x *y una negación* N *tal que* $y = N\,x$.

El siguiente teorema establece algunas propiedades de los contrarios.

Teorema 21 *Si el elemento* y *de un reticulado dialéctico es contrario de* x *se cumple:*

1. *el elemento* x *es contrario de* y*;*
2. *el elemento* $N\,x$ *es contrario de* $N\,y$*, donde* N *es una negación cualquiera;*
3. *el elemento* $N\,y$ *es contrario de* $N\,x$*.*

Demostración. En la propiedad 1, por definición de contrarios existe una negación N_i tal que $y = N_i\,x$, luego ocurre $y = N_i^{-1}\,x$ y son contrarios. En la propiedad 2, aplicando N a la ecuación ya conocida se obtiene $N\,y = N\,N_i\,x$, luego $N\,y = (N\,N_i\,N^{-1})N\,x$, pero por el Teorema 19 $N\,N_i\,N^{-1}$ es una negación, luego queda demostrado. La propiedad 3 es consecuencia de 1 y 2. □

Ejemplos en **D3**

A los efectos de fijar las ideas expuestas, consideremos el reticulado hegeliano **D3** de la Figura 2 y la negación definida como: $N\,0 = 1$, $N\,1 = 0$, $N\,t = a$, $N\,a = s$, $N\,s = t$, donde t, a, s son, respectivamente, *tesis*, *antítesis* y *síntesis*. Empleando la notación de sustituciones, esta negación se puede escribir como:

$$N = (0\;1)(t\,a\,s).$$

Puesto que una negación en **L** es una permutación de sus elementos, se puede emplear una notación similar a la empleada en los grupos de sustituciones. De esta manera se indica que 0 se transforma en 1 y recíprocamente, así como se indica que t se transforma en a, éste en s y éste en t. Cada lista encerrada en un paréntesis indica un ciclo cerrado. Si algún elemento no aparece, significa que es transformado en sí mismo por la operación.

En el reticulado considerado se pueden definir 6 negaciones que corresponden a las 6 posibles permutaciones de los elementos t, a, s. Estas negaciones son:

$$(0\;1)\;\;(0\;1)(t\,a)\;\;(0\;1)(t\,s)\;\;(0\;1)(a\,s)\;\;(0\;1)(t\,a\,s)\;\;(0\;1)(t\,s\,a).$$

Las dos últimas negaciones son estrictas. Los automorfismos también son 6 y son:

$$I\;\;(t\,a)\;\;(t\,s)\;\;(a\,s)\;\;(t\,a\,s)\;\;(t\,s\,a)$$

donde I es la transformación idéntica. El conjunto de las 12 transformaciones forman un *grupo algebraico*[114] que designamos como $\mathbf{G}_L$, el grupo de transformaciones del reticulado **L**.

Como veremos, en un mismo reticulado **L** pueden existir negaciones en sentido amplio y negaciones estrictas. Para el estudio de algunos problemas es importante realizar esta diferenciación. En la exposición que sigue se indicara a título expreso si una negación es en sentido estricto en el contexto que se la usa.

[114] Un grupo es un conjunto de elementos **G**, tal que si $x, y \in$ **G**, entonces está definida una operación *producto* $x\,y$, asociativa –pero no necesariamente conmutativa– y existe un elemento $I \in$ **G** con la propiedad $I\,x = x\,I = x$. Además, todo elemento x posee un elementos inverso x^{-1} tal que $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = I$.

Solamente las negaciones que permutan los tres elementos en el reticulado hegeliano **D3** son negaciones en sentido estricto, e inversas una de la otra. No en todo reticulado existe una negación estricta. Así por ejemplo, en **3D5** no la hay, pero sí en **3D4**.[115]

Es interesante observar que existen negaciones –como ocurre con las cuatro primeras en el reticulado hegeliano **D3**– que poseen *elementos que coinciden con su negación*.

Esta situación no es nueva en la lógica, porque ya las lógicas modales [58] poseían elementos centrales. Tampoco es nueva para la dialéctica y así ocurre en las clásicas afirmaciones de Erakleitos tales como:

> *The way up and the way down are one and the same.*[116] [45, Diels #108]
>
> *For the wool–carder the straight and the winding way are one and the same.*[117] [45, Diels #111]
>
> *It is one and the same thing to be living and dead, awake or asleep, young or old. The former aspect in each case becomes the latter, and the latter becomes the former, by sudden unexpected reversal.*[118] [45, Diels #113]

En todos los casos se expresa la coincidencia entre una idea y la negación de esta idea. Este punto de vista de la dialéctica de Erakleitos no ofrece ninguna dificultad en la lógica que estamos estudiando, aun en el caso extremo de que se tome la coincidencia en sentido estricto y literal existen elementos y negaciones para los que se cumple.

Una lógica queda definida toda vez que se especifica un reticulado **L** y una negación N. Nos ocuparemos en esta sección de una colección de reticulados y negaciones cuya caracterización informal es que *poseen interés lógico*.

---

[115] En **3D4** la negación estricta es $N = (0\,1)(a\,B)(b\,D)(c\,D)(d\,A)(p\,r)(q\,s)$ que también es involutoria o de grado 2.

[116] El camino que sube y el que baja son uno y el mismo.

[117] Para el cardador de lana, recto y curvo es lo mismo.

[118] Es una y la misma cosa estar vivo o muerto, despierto o dormido, joven o viejo. El primero en cada caso deviene el segundo y el segundo deviene el primero por una súbita e inesperada inversión.

La lógica *yin-yang* es el producto –ver Definición 9, página 86– B×B de dos reticulados boleanos simples, ver la Figura 11.

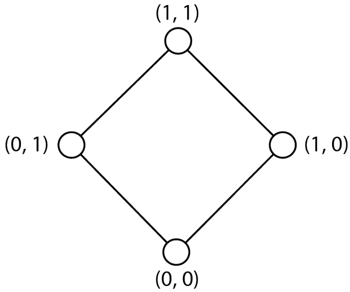


Figura 11: Dialéctica *yin-yang* como producto de lógicas booleanas.

Una propiedad de un reticulado que tiene consecuencias fundamentales para la lógica es la propiedad de ser *distributivo*.

Definición 20 *Un reticulado es distributivo si se cumple, para cualquier tres elementos* x, y, z*, la propiedad* $x\,.\,(y+z) = x\,.\,y + x\,.\,z$.

Con esta definición se cumple el siguiente teorema.

Teorema 22 *Si un reticulado* **L** *es distributivo, entonces existe una única negación* N *estricta que posee la propiedad involutoria* $NN\,x = x$.

Demostración. Sean N_1 y N_2 dos negaciones estrictas. Es claro que $N_1\,a = N_1\,a\,.\,1 = N_1\,a\,.\,(a + N_2\,a) = N_1\,a\,.\,a + N_1\,a\,.\,N_2\,a = N_1\,a\,.\,N_2\,a$. Luego sigue que $N_1\,a \leq N_2\,a$. En forma simétrica se obtiene $N_2\,a \leq N_1\,a$, luego $N_2\,a = N_1\,a$ para todo a. Por el Teorema 19, N^{-1} es una negación estricta. Luego N y N^{-1} coinciden y $N^{-1}a = N\,a$ de donde resulta $N^2 a = a$. □

Es oportuno señalar que *el recíproco no es cierto*. Tal como se ve más adelante, hay negaciones involutorias estrictas en reticulados no distributivos. También ocurre que en un reticulado distributivo como $\mathbf{B}^2$ hay una negación que no es estricta, como la negación $N = (0\,1)$

en la Figura 11.

Desde el punto de vista físico, esto establece que la lógica del spin, al no ser distributiva, no puede ser asimilada a una lógica booleana. Esto hace a la "ilógica" fundamental de la mecánica de las partículas elementales.

Otra conclusión importante, que no demostraremos pero que se encuentra en [16], establece que toda lógica booleana de un número finito de elementos es una potencia $\mathbf{B}^n$ de la lógica booleana simple.

Las funciones unitarias en los reticulados dialécticos

El estudio de las funciones lógicas es el siguiente aspecto para la construcción de una dialéctica. Antes de analizar las funciones de interés específico sobre el tema, es conveniente realizar un análisis más general acerca de las funciones lógicas. Este análisis comienza con una observación importante. Las funciones que se pueden construir en un reticulado mediante valores constantes, variables y las dos operaciones, son funciones monótonas porque todas estas operaciones lo son. Para construir funciones que nos sean monótonas es necesario agregar negaciones, que son función monótonas inversas. Este hecho muestra la importancia de la función negación.

Para analizar la construcción de las funciones lógicas que se pueden construir con las dos operaciones y la negación en un reticulado comencemos por la definición de las funciones unitarias.

Definición 21 *Se llama* función unitaria $U(x, a)$ *de un reticulado* $\mathbf{L}$ *y un elemento* a, *a una función tal que para* $x \in \mathbf{L}$ *se cumple para* $x = a$, $U(x, a) = 1$ *y para* $x \neq a$, $U(x, a) = 0$.

Con esta definición se pueden demostrar algunos teoremas importantes para los reticulados estudiados.

Teorema 23 *En todo reticulado dialéctico de rango 1 y de grado $n > 2$, se pueden construir las funciones $U(x, 1)$ y $U(x, 0) = U(N\,x, 1)$. Para todo elemento p del reticulado, $p \neq$ 0, 1, vale $U(x, p) = N\,U(p\,.\,x, 0)\,.\,N\,U(p + x, 1)$, donde N es una negación.*

Demostración. El reticulado posee, al menos, tres átomos a, b, c, contrarios entre sí puesto que $n \geq 3$. Se puede construir la función:

$$U(x, 1) = (a\,.\,x + b)\,.\,(a\,.\,x + c)\,.\,(b\,.\,x + a)\,.\,(b\,.\,x + c).$$

Para $x = 0$ la función vale $= b\,.\,c\,.\,a\,.\,c = 0$. Para $x \neq a, b$ se tiene $U(x, 1) = b\,.\,c\,.\,a\,.\,c = 0$. Para $x = a$ se tiene $U(x, 1) = (a + b)\,.\,(a + c)\,.\,a\,.\,c = 0$. Para $x = b$ ocurre lo mismo que para a puesto que la función es simétrica en estos parámetros. Finalmente, para $x = 1$, $U(x, 1) = (a + b)\,.\,(a + c)\,.\,(b + a)\,.\,(b + c)$ =1. Es claro que la función $U(x, 0) = U(N\,x, 1)$ vale 1 solamente cuando $N\,x = 1$, luego solamente cuando $x = 0$. La función $U(p\,.\,x, 0) + U(p + x, 1)$ para $x = p$ vale 0 y para todo valor dialéctico diferente de p vale 1 puesto que $p\,.\,x = 0$ y $p + x = 1$. Para $x = 0$ vale 1 por el primer sumando y para $x = 1$ también vale 1 por el segundo sumando. Luego la negación de la suma, por De Morgan, demuestra el resultado. □

Teorema 24 *En todo reticulado dialéctico* ***rDn*** *con rango $2 \leq r < n - 1$ se pueden construir las funciones unitarias $U(x, 1)$ y $U(x, 0) = U(N\,x, 1)$.*

Demostración. Sea M un máximo del reticulado. Por la condición del rango, este máximo posee al menos dos átomos contrarios lógicos. En efecto, consideremos los r átomos que son menores que M. Por la propiedad de n existen por los menos dos átomos fuera de este conjunto y por la manera en que fueron obtenidos, son contrarios lógicos. Sean a y b estos átomos contrarios lógicos de M. Entonces se puede construir la función:

$$f(x, M) = (M\,.\,x + a)\,.\,(a\,.\,x + M)\,.\,b.$$

Para $x = 1$ vale $(M + a) \,.\, (a + M) \,.\, b = b$. Si $x \leq M$ la función vale $(x + a) \,.\, M \,.\, b = 0$. Si x no es comparable con M la función vale $a \,.\, (a \,.\, x + M) \,.\, b = 0$. Consideremos ahora todos los máximos M_i del reticulado y sumemos todas las funciones f_i, entonces:

$$U(x, 1) = f_1(x, M_1) + \cdots + f_n(x, M_n)$$

puesto que para $x \neq 1$ vale 0 porque todos los sumandos valen 0. Para $x = 1$ vale 1 por ser suma de todos los átomos del reticulado, como se debía demostrar. Es claro que la función $U(x, 0) = U(N\,x, 1)$ vale 1 solamente cuando $N\,x = 1$, luego solamente cuando $x = 0$. □

Teorema 25 *En todo reticulado dialéctico **rDn** con rango que cumpla $2 \leq r < n - 1$ se puede construir la función unitaria $U(x, p)$, donde p es un elemento cualquiera del reticulado.*

Demostración. El teorema ya está demostrado para 0 y 1. Sean a_i y M_j respectivamente los s átomos y los t máximos que cumplen $a_i \leq p$ y $M_j \geq p$. Sea la función:

$$g(x) = U(a_1 \,.\, x, 0) + \cdots + U(a_s \,.\, x, 0).$$

La función $g(x)$ –que solamente puede tomar los valores 0 o 1– es 0 si todos los sumandos son 0 para lo cual debe ocurrir que todos los productos $a_i \,.\, x$ deben ser diferentes de 0. Puesto que los a_i son átomos, debe ocurrir que $a_i \,.\, x = a_i$ o sea $x \geq a_i$ o sea $x \geq a_1 + \cdots + a_s = p$. Recíprocamente, si $x \geq p$ la función vale 0 porque todos los productos con los átomos son diferentes de 0. Por el contrario, para todo otro valor de x, la función vale 1. Sea ahora la función:

$$h(x) = U(M_1 + x, 1) + \cdots + U(M_t + x, 1).$$

La función $h(x)$ –que solamente puede tomar los valores 0 o 1– es 0 si todos los sumandos son 0 para lo cual debe ocurrir que todos las sumas $M_j + x$ deben ser diferentes de 1. Puesto que los M_j son máximos, se debe cumplir que $M_j + x = M_j$ de donde se deduce que $x \leq M_j$ o sea que $x \leq M_1 \,.\, \cdots \,.\, M_t = p$. Recíprocamente, si $x \leq p$ la función vale 0 porque todos las sumas con los máximos son diferentes de 1. Sea ahora la función:

$$g(x) + h(x)$$

Esta función –que solamente puede tomar los valores 0 o 1– es 0 cuando se cumpla $a_1 + \cdots + a_s = p \leq x \leq p = M_1 \,.\, \cdots \,.\, M_t$. Luego el único valor que cumple estas desigualdades es $x = p$. Entonces la función $U(x,p) = N\ (g(x) + h(x))$ vale 1 solamente cuando $x = p$, tal como se debía demostrar. □

Una de las consecuencias de la existencia de funciones unitarias es la posibilidad de construir funciones que tomen el conjunto de valores que se desee, tal como muestra el siguiente teorema.

Teorema 26 *Si un reticulado* **L** *posee, para todo elemento* a*, una función unitaria* $U(x,a)$*, entonces se puede construir cualquier función sobre este reticulado, mediante las funciones unitarias y operaciones lógicas una función* $f(x)$ *que para cada para de valores* $a_i, b_i \in$ **L** *ocurra* $f(a_i) = b_i$*.*

Demostración. Consideremos una tabla que haga corresponder a cada uno de los valores $a_i \in$ **L** el valor $b_i \in$ **L** –incluyendo los valores 0 y 1–, existe la función $f(x)$ tal que $f(a_i) = b_i$ dada por:

$$f(x) = b_1 \,.\, U(x,a_1) + \cdots + b_s \,.\, U(x,a_s)$$

que toma el valor indicado b_i para cada a_i. □

Teorema 27 *Sea* **H** *un homomorfismo tal que transforma un reticulado* **L** *en* **L'** *y sea* N *una negación definida en* **L***. Para todo elemento* $x' \in$ **L'** *imagen del elemento* $x \in$ **L***, con* **H**:$x \to x'$*, se puede definir en* **L'** *una negación* N' *como* $N'x' =$**H**:Nx*.*

Demostración. Es claro que todo elemento de **L'**, por ser imagen de un elemento de **L** posee definido su elemento negado. Es necesario solamente demostrar la propiedad de De Morgan para N'. Consideremos $x', y' \in$ **L**, es claro por la definición de homomorfismo que **H**:$(x+y) \to x' + y'$. Entonces $N'(x'+y')$= **H**:$(N(x+y)) =$ **H**:$(Nx \,.\, Ny) =$ = **H**:Nx . **H**:Ny $=$ $N'x' \,.\, N'y'$. En forma dual se demuestra el caso dual. $\square$

Teorema 28 *Si un reticulado* **L** *cumple las condiciones de los Teoremas 23 y 24 entonces no posee* homomorfismos–R *excepto triviales.*

Demostración. Sea **H** un homomorfismo–R. Deben existir al menos dos elementos $a, b \in$ **L** tales que **H**:a = **H**:b para que la imagen de **L** posea menos elementos que **L**. Por el Teorema 26 se puede construir una función lógica $f(x)$, mediante las operaciones $+ \,.\, N$ que tome los valores $f(a) = 1$ y $f(b) = 0$. El homomorfismo **H** permite definir la función $f'(x')$ =**H**:$f(x)$ por aplicación a la expresión $f(x)$ construida mediante las operaciones $+ \,.\, N$, según el Teorema 27. Tendremos entonces que 1'= **H**:$f(a)$ = f'(**H**:a) = f'(**H**:b) = **H**:$f(b)$ = 0', luego el homomorfismo es trivial. $\square$

Este teorema muestra que los reticulados que cumplen con los Teoremas 23 y 24 carecen de homomorfismos que mantengan las propiedades lógicas pero posean menos elementos. Son reticulados que construyen una lógica que no puede "simplificarse" más, la imagen último del homomorfismo universal que construye la lógica.

Es conveniente definir otras funciones unitarias que son útiles para construir funciones lógicas. Para eso designemos simplemente como $U(x)$ a la función unitaria $U(x, 1)$.

Teorema 29 *Se puede construir la función $D(x)$ que vale 1 si y sólo si x posee un valor dialéctico.*

Demostración. Es claro que $D(x) = N\,U(x) \,.\, N\,U(Nx)$ donde N es una negación, puesto que $N\,U(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $N\,U(Nx) = 1$ para todo $x \neq 0$. Luego el producto vale 1 si y sólo si es un valor dialéctico. $\square$

Para las funciones de dos variables también se pueden construir las funciones unitarias específicas que valen 1 en cada una de las regiones funcionales indicadas. El Cuadro 4 muestra las diferentes situaciones donde, por ejemplo, $U_{1d} = 1$ si $x = 1$ e y posee un valor dialéctico.

Cuadro 4: Esquema simple de las funciones unitarias.

	0	dialécticos	1
0	U_{00}	U_{0d}	U_{01}
dialécticos	U_{d0}	U_{dd}	U_{d1}
1	U_{10}	U_{1d}	U_{11}

Las diferentes funciones están definidas por las siguientes expresiones en función de U, D, N:

$$\begin{array}{ll} U_{00} = U(N\,x)\,.\,U(N\,y) & U_{d0} = D(x)\,.\,U(N\,y) \\ U_{0d} = U(N\,x)\,.\,D(y) & U_{dd} = D(x)\,.\,D(y) \\ U_{01} = U(N\,x)\,.\,U(y) & U_{d1} = D(x)\,.\,U(y) \\ U_{10} = U(x)\,.\,U(N\,y) & U_{1d} = U(x)\,.\,D(y) \\ U_{11} = U(x)\,.\,U(y) & \end{array}$$

Teorema 30 *Toda función $f(x, y)$ se puede descomponer de la forma:*

$$f(x, y) = g_{00}\,.\,U_{00} + g_{d0}\,.\,U_{d0} + \cdots + g_{11}\,.\,U_{11}$$

donde $g_{00}, g_{d0}, \cdots, g_{11}$ son funciones de las variables x, y. Si la función $f(x, y)$ es invariable en el automorfismo A, entonces también los son las funciones $g_{00}, g_{d0}, \cdots, g_{11}$.

Demostración. En efecto, se debe cumplir $A\,f(x, y) = f(A\,x, A\,y)$, donde A es el automorfismo considerado. Todas las funciones unitarias son invariantes, luego se debe verificar que:

$$A\,g_{00}(x,y)\,.\,U_{00}+\cdots+A\,g_{11}(x,y)\,.\,U_{11}=$$
$$=g_{00}(A\,x,A\,y)\,.\,U_{00}+\cdots+g_{11}(A\,x,A\,y)\,.\,U_{11}.$$

Puesto que esta representación es única en la región considerada, debe ocurrir $A\,g_{00}(x,y)=g_{00}(A\,x,A\,y),\cdots,A\,g_{11}(x,y)=g_{11}(A\,x,A\,y)$ y todas las funciones de la descomposición también son invariables en la zona correspondiente. □

Cuadro 5: Tabla de verdad de una función invariante genérica.

	0	dialécticos	1
0	0,1	$f_1(y)$	0,1
dialécticos	$f_4(x)$	$g(x,y)$	$f_2(x)$
1	0,1	$f_3(y)$	0,1

En el Cuadro 5 se presenta una notación más simple para las funciones intrínsecas de dos variables en un reticulado dialéctico.

La estructura del Cuadro 4 se puede generalizar a los reticulados de rango superior a 1, tal como muestra el Cuadro 6. Se considera que *dial*$_1$ y *dial*$_2$ son conjuntos de elementos dialécticos *de igual nivel lógico*. El resultado es general cualquiera sea el número de niveles lógicos del reticulado.

Cuadro 6: Esquema compuesto de las funciones unitarias.

	0	dial_1	dial_1	1
0	U_{00}	U_{0d_1}	U_{0d_2}	U_{01}
dial_1	U_{d_10}	$U_{d_1d_1}$	$U_{d_1d_2}$	U_{d_11}
dial_2	U_{d_20}	$U_{d_2d_1}$	$U_{d_2d_2}$	U_{d_21}
1	U_{10}	U_{1d_1}	U_{1d_2}	U_{11}

Para generalizar los resultados basta solamente demostrar que existen las funciones unitarias representadas en el cuadro. Algunas coinciden con las anteriores, como U_{01} y similares, pero otras son nuevas.

Consideremos el caso $U_{d_1 d_2}$, igual que antes, esta función es el producto de las funciones simples $D_{d_1}(x) \,.\, D_{d_2}(y)$. Para demostrar que estas funciones existen, por ejemplo la primera de ellas, consideremos un elemento dialéctico a del cual sabemos que existe la función unitaria $U(x, a)$. Se tiene entonces que:

$$D_{d_1}(x) = U(x, a) + U(x, A\, a) + \cdots + U(x, A^p a)$$

donde $I = A^0, A, \ldots, A^p$ son todos los automorfismos del reticulado y, por lo tanto, generan todos los valores de igual nivel lógico de *dial*$_1$. Los mismo ocurre para *dial*$_2$.

De igual manera que en el caso simple, la descomposición de una función –como suma de funciones mediante las funciones unarias– es única. En el caso de una función invariable en la rotación, cada una de las funciones componentes también debe serlo.

El grupo de negaciones y automorfismos

La siguiente definición establece la cualidad esencial de las funciones definidas en un reticulado: su invariancia en un automorfismo.

Definición 22 *Sea $f(x, \ldots, z)$ una función del reticulado* **L** *y A un un automorfismo* no trivial *A del reticulado. Se dice que f es* invariante *en A si se verifica $A\, f(x, \ldots, z) = f(A\, x, \ldots, A\, z)$.*

Esta propiedad es equivalente a este diagrama funcional (por sencillez, está representado en una única variable):

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "F"] \arrow[d, "A"'] & F(x) \arrow[d, "A"] \\ y \arrow[r, "F"'] & F(y) \end{tikzcd}$$

Teorema 31 *Si la función $f(x, \ldots, z)$ en un reticulado es invariante en A, se cumple que es invariante para todo automorfismo A^s.*

Demostración. Es claro que $A\,(A\,f(x,\ldots,z)\,) = A\,f(A\,x,\ldots,A\,z) = f(A^2\,x,\ldots,A^2\,z)$ y así sucesivamente para las siguientes aplicaciones de A. $\Box$

Un automorfismo aplicado a los argumentos de una función conduce al mismo resultado que aplicarlo al resultado de la función. De esta manera los automorfismos –la rotaciones, por ejemplo, en el caso de los reticulados dialécticos– establece la equivalencia formal entre sus elementos dialécticos. Esta propiedad es esencial en las funciones de aplicación a la lógica.

Teorema 32 *Sea $f(x,\ldots,z)$ una función invariante del reticulado **L**. El conjunto de los automorfismos que verifican $A\,f(x,\ldots,z) = f(A\,x,\ldots,A\,z)$ es un subgrupo de $\mathbf{G}_L$.*

Demostración. Sean A y B dos automorfismos que cumplen $A\,f(x,\cdots,z) = f(A\,x,\ldots,A\,z)$ y $B\,f(x,\ldots,z) = f(B\,x,\ldots,B\,z)$. Se tiene entonces:

$$B\,A\,f(x,\ldots,z) = B\,f(A\,x,\ldots,A\,z) = f(B\,A\,x,\ldots,B\,A\,z).$$

Se demuestra así que el producto de dos automorfismos pertenece al conjunto. Consideremos ahora:

$$A\,f(A^{-1}\,x,\ldots,A^{-1}\,z) = f(A\,A^{-1}\,x,\ldots,A\,A^{-1}\,z) = f(x,\ldots,z)$$

luego es claro que $f(A^{-1}\,x,\ldots,A^{-1}\,z) = A^{-1}\,f(x,\ldots,z)$ con lo que queda demostrado que la inversa de un automorfismo también pertenece al conjunto. El automorfismo identidad también pertenece al conjunto. $\Box$

Es claro que las negaciones y los automorfismos forman un grupo $\mathbf{G}_L$ de transformaciones del reticulado como consecuencia del Teorema 19. De inmediato se obtienen un conjunto de propiedades muy simples de este grupo.

El producto de negaciones estrictas no necesariamente es una negación estricta, hay múltiples ejemplos. Introduciremos una forma de composición de reticulados que es de uso específico para la dialéctica.[119]

> **Definición 23** *Consideremos dos reticulados (disjuntos, sin elementos comunes)* $\boldsymbol{L}_1$ *y* $\boldsymbol{L}_2$*. Se llama* composición dialéctica *o simplemente* composición *de dos reticulados* $\boldsymbol{L}_1$ *y* $\boldsymbol{L}_2$ *al reticulado* $\boldsymbol{L}_1 \uplus \boldsymbol{L}_2$ *formado por todos los elementos de cada reticulado, con sus relaciones de orden propias, pero que comparten los elementos 0 y 1, tal como muestra la Figura 12.*

```
 1      1        1
 |      |       / \
L1     L2     L1   L2
 |      |       \ /
 0      0        0
```

Figura 12: Composición dialéctica de los reticulados $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$.

Como es inmediato, cada uno de los reticulados conserva todas sus propiedades de negación, isomorfismo y homomorfismo, solamente pasan a compartir los elementos extremos. La composición dialéctica $\uplus$ se puede extender a n reticulados y es una operación conmutativa y asociativa.

Resulta inmediato que el grupo $\mathbf{G}_L$ de la composición de dos reticulados que poseen grupos $\mathbf{G}_{L_1}$ y $\mathbf{G}_{L_2}$ es el producto directo de grupos $\mathbf{G}_{L_1} \times \mathbf{G}_{L_2}$. En cierta medida existe un resultado inverso.

> **Teorema 33** *Si* N *es una negación de un reticulado* $\boldsymbol{L}$*, entonces el automorfismo* $A = N\,N$*, que transforma un átomo en un átomo del reticulado genera una sustitución* S *entre los átomos que define un conjunto de sub–reticulados dialécticos* $\boldsymbol{L}_i$ *tales que su composición coincide con* $\boldsymbol{L}$*=*$\boldsymbol{L}_1 \uplus \cdots \uplus \boldsymbol{L}_s$*.*

Demostración. S es una sustitución entre los átomos y como tal es

[119] Esta forma de composición de reticulados no es usual en la matemática.

el producto directo de diversas sustituciones parciales entre ellos. Sea $S = S_1 \times \cdots \times S_s$ donde cada una de las sustituciones S_i posee un único ciclo. Los átomos $a_{j\,i} \in S_i$ generan un reticulado $\mathbf{L}_i$ por adiciones sucesivas entre ellos. Los supremos obtenidos por negación también lo forman. La negación N es una negación entre los elementos de este sub–reticulado que es estricta. Luego $\mathbf{L}_i$ es un reticulado dialéctico –porque posee una negación estricta y cada elemento es suma de sus átomos o producto de sus máximos– que posee un grupo $\mathbf{G}_{P_i}$ que es un factor directo del grupo $\mathbf{G}_P$ de **L**. Por aplicación sucesiva de este procedimiento se hallan los diversos sub–reticulados que forman **L**. $\square$

Vale la pena observar que el teorema *no establece* que N –ni sus derivados A o S– determinan al reticulado, *sólo establece su carácter compuesto*. En efecto, los reticulados **2D5** y **3D5** generan la misma sustitución S entre sus cinco átomos, una rotación de los cinco elementos, y sin embargo los reticulados no son los mismos.

También vale la pena observar una característica especial de los reticulados dialécticos de rango 1. Consideremos, como ejemplo pero que es válido en general, el reticulado **D5** y la negación estricta $N = (0\,1)(a\,b)(c\,d\,e)$. La aplicación del resultado anterior muestra que se cumple la relación **D5** = **D2** $\uplus$ **D3**. Esto se generaliza de muchas otras maneras a (casi) todos los reticulados dialécticos de rango 1.

Este tipo de composición de reticulados puede tener interés para aplicar la dialéctica a las relaciones entre diversas teorías científicas, aparentemente contradictorias. Este aspecto se comenta más adelante, al final del libro.

Las negaciones en **Dn**

Se empleará (casi) siempre la *notación alfabética* para los elementos –$a, b, \cdots$– a pesar de que esto sugiere un orden que los átomos del reticulado *no poseen*. Ocasionalmente para **D3** se empleará la notación hegeliana t, a, s.

Este caso es muy particular y muy simple. Toda permutación de los átomos genera una negación, con el simple agregado de transformar entre sí 0 y 1. En efecto, si a y b son dos átomos *diferentes*, ocurre $a \,.\, b = 0$ y $a + b = 1$. Cualquier permutación N transforma a, b en los átomos $N\,.\,a$ y $N\,.\,b$, *también diferentes*, y se cumple la propiedad de De Morgan en forma trivial.

No obstante esto debemos distinguir las *negaciones comunes*, N_k, que establecen la rotación de los átomos –una vez que se elige un orden entre ellos– desplazando k átomos en una u otra dirección.[120] Todas las demás negaciones son llamada *negaciones exóticas*. En la secciones siguientes se comprende la razón de esta diferenciación.

Las negaciones en **2Dn**

En lo que sigue se emplean dos notaciones para los elementos del reticulado como se ilustra en la Figura 13. Llamamos *notación alfabética* a la que emplea letras minúsculas para los átomos y mayúsculas para los máximos. Llamamos *notación matemática* a la que emplea d_i para los átomos y D_i para los máximos. La notación con letras en orden alfabético es más sencilla para las tablas de verdad, la notación con subíndices es útil para demostrar propiedades de algunas funciones.

Para que las expresiones en **2Dn** sean más fáciles de interpretar, se emplea la notación matemática. Así por ejemplo, las rotaciones se expresan $R_k\, d_i = d_{i+k}$ para la rotación *directa* y $R_{-k}\, d_i = d_{i-k}$ para la rotación *reversa*.[121] Los índices se numeran $0, 1, \ldots, n-1$ y todas las operaciones son módulo n. En definitiva puede considerarse que k posee signo. La rotación es similar para los máximos. A diferencia de los reticulados de rango $r = 1$, estos reticulados poseen rotaciones naturales y bien definidas. Esto también ocurre en los rangos mayores que 2.

La búsqueda sistemática de las funciones negación mediante computadora conduce a $2n$ resultados que se expresan por dos listas diferentes, la lista de negaciones *comunes*:[122]

---

[120] La existencia de una rotación está sugerida por los elementos griegos y la doble rotación por los elementos chinos.

[121] Como es natural, los sentidos de rotación, reversa o directa. son convencionales, depende de la manera como se indicen los elementos del reticulado, no es nada absoluto. Por ejemplo, si el máximo a la "derecha" del átomo de índice 1 fuese 4, simplemente habría una constante de desplazamiento en todas las ecuaciones que siguen, pero el resultado final no cambiaría.

[122] Cuando ya estaba escrito este tema, Rafael Grompone me sugirió que sumara 1 a

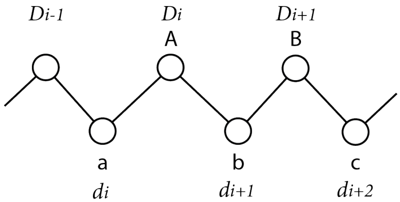


Figura 13: Las dos notaciones empleadas en **2Dn**.

- $N_0\, d_i = D_i \qquad N_0\, D_i = d_{i+1}$
- $N_1\, d_i = D_{i+1} \qquad N_1\, D_i = d_{i+2}$
- $\dots$
- $N_{n-1}\, d_i = D_{i+n-1} \qquad N_{n-1}\, D_i = d_i$

y la lista de negaciones *exóticas*, representadas por $\tilde{N}$, es:

- $\tilde{N}_0\, d_i = D_{n-i} \qquad \tilde{N}_0\, D_i = d_{n-i}$
- $\tilde{N}_1\, d_i = D_{n-i+1} \qquad \tilde{N}_1\, D_i = d_{n-i+1}$
- $\dots$
- $\tilde{N}_{(n-1)}\, d_i = D_{n-i+n-1} = D_{-i-1} \qquad \tilde{N}_{(n-1)}\, D_i = d_{-i-1}$.

Todas las operaciones y numeraciones son módulo n. Estos resultados se combinan en los siguientes teoremas.

Teorema 34 *Las n negaciones comunes en **2Dn** corresponden a las ecuaciones siguientes (las operaciones son módulo n):*
$N_k\, d_i = D_{i+k} \qquad N_k\, D_i = d_{i+k+1}$.

Demostración. Se trata de demostrar que estas transformaciones cumplen con la propiedad de De Morgan. Es claro que el producto de dos átomos diferentes es 0 y la suma de dos máximos diferentes es 1. Luego $N_k(d_i \,.\, d_j) = N_k\, 0 = 1 = D_{i+k} + D_{j+k} = N_k\, d_i + N_k\, d_j$

los índices de modo que N_{n-1} pasara a ser N_0 y también los índices del reticulado. De esta manera se obtiene una nomenclatura más coherente y simétrica. Como esta modificación implica revisar mucho material, quedará para una próxima versión.

y se cumple De Morgan. En forma dual resulta para los máximos. Sea la suma de dos átomos no contiguos, ocurre $N_k(d_i + d_j) = N_k\,1 = 0 = D_{i+k}\,.\,D_{j+k} = N_k\,d_i\,.\,N_k\,d_j$ puesto que los máximos tampoco son contiguos. Lo mismo vale en forma dual para los máximos. Si los átomos son contiguos ocurre $N_k(d_i + d_{i+1}) = N_k\,D_i = d_{i+k+1} = D_{i+k}\,.\,D_{i+k+1} = N_k\,d_i\,.\,N_k\,d_{i+1}$ y se cumple De Morgan. Falta demostrar el caso de un átomo y un máximo contiguos. Si $N_k(d_i\,.\,D_i) = N_k\,d_i = D_{i+k} = D_{i+k} + d_{i+k+1} = N_k\,d_i + N_k\,D_i$ y se cumple De Morgan. Si fuera el otro caso de elementos contiguos $N_k(d_{i+1}\,.\,D_i) = N_k\,d_{i+1} = D_{i+k+1} = D_{i+k+1} + d_{i+k+1} = N_k\,d_{i+1} + N_k\,D_i$ y también se cumple. En el caso de suma, se tiene $N_k(d_i + D_i) = N_k\,D_i = d_{i+k+1} = D_{i+k}\,.\,d_{i+k+1} = N_k\,d_i + N_k\,D_i$ y se cumple. Finalmente, para $N_k(d_{i+1} + D_i) = N_k\,D_i = d_{i+k+1} = D_{i+k+1}\,.\,d_{i+k+1} = N_k\,d_{i+1} + N_k\,D_i$ y se cumple. □

Teorema 35 *La n negaciones* exóticas *en **2Dn** corresponden a las ecuaciones siguientes (las operaciones son módulo n):*
$\tilde{N}_k\,d_i = D_{n-i+k}$ $\qquad$ $\tilde{N}_k\,D_i = d_{n-i+k}$.

Demostración. La demostración para la negaciones exóticas sigue las líneas generales del teorema anterior. En el caso del producto de dos átomos diferentes, la suma de dos máximos diferentes o los casos no contiguos, De Morgan es inmediato, igual que antes. Para dos átomos contiguos ocurre

$$\tilde{N}_k(d_i{+}d_{i+1}) = \tilde{N}_k D_i = d_{n-i+k} = D_{n-i+k-1}\,.\,D_{n-i+k} = \tilde{N}_k d_{i+1}\,.\,\tilde{N}_k d_i$$

y se cumple De Morgan. Para un átomo y un máximo contiguos, si $\tilde{N}_k(d_i\,.\,D_i) = \tilde{N}_k\,d_i = D_{n-i+k} = D_{n-i+k} + d_{n-i+k} = \tilde{N}_k\,d_i + \tilde{N}_k\,D_i$ y se cumple De Morgan. Para el otro caso contiguo ocurre lo mismo. En el caso de suma se tiene $\tilde{N}_k(d_i{+}D_i) = \tilde{N}_k\,D_i = d_{n-i+k} = D_{n-i+k}\,.\,d_{n-i+k} = \tilde{N}_k\,d_i\,.\,\tilde{N}_k\,D_i$ y se cumple. En forma similar, para el otro contiguo también se cumple. □

La aplicación de una rotación a una negación normal es un caso importante que se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 36 *Para las negaciones comunes en* **2Dn** *son válidas las ecuaciones:* $R_k\, N_j = N_j\, R_k = N_{j+k}$. *Las operaciones son módulo* n *y* k *puede ser negativo.*

Demostración. Consideremos $R_k\, N_j\, d_i = R_k\, D_{i+j} = D_{i+j+k} = N_{j+k}\, d_i$. Pero $N_j\, R_k\, d_i = N_j\, d_{i+k} = D_{i+j+k}$, luego coincide con el resultado anterior. Para los máximos se tiene algo similar: $R_k\, N_j\, D_i = R_k\, d_{i+j+1} = d_{i+j+k+1} = N_{j+k}\, D_i$. Pero $N_j\, R_k\, D_i = N_j\, D_{i+k} = d_{i+j+k+1}$ igual al caso anterior. La misma propiedad vale en el caso k negativo porque la ecuación de rotación es única. $\square$

Como consecuencia de este teorema, una negación común se transforma en otra por una rotación de los elementos del reticulado puesto que vale la ecuación de transformación $R_{-k}\, N_j\, R_k = N_j$. El producto –aplicación sucesiva– de dos negaciones comunes es una rotación.

Teorema 37 *Para las negaciones exóticas en* **2Dn** *son válidas las ecuaciones:* $R_k\, \tilde{N}_j = \tilde{N}_j\, R_{-k} = \tilde{N}_{(j+k)}$. *Las operaciones son módulo* n *y* k *puede ser negativo.*

Demostración. En el caso de las negaciones exóticas se igual. Consideremos $R_k\, \tilde{N}_j\, d_i = R_k\, D_{n-i+j} = D_{n-i+j+k} = \tilde{N}_{(k+j)}\, d_i$. Pero $\tilde{N}_j\, R_{-k}\, d_i = \tilde{N}_j\, d_{i-k} = D_{n-i+k+j} = \tilde{N}_{(j+k)}\, d_i$. La demostración es igual para los máximos. Luego está demostrado. Igual que en el caso anterior, k puede ser negativo. $\square$

Este resultado y el que se obtiene en **3Dn** no contradice el Teorema 19. Allí se establecía, por ejemplo, que $R_k\, \tilde{N}_j\, R_k^{-1}$ es una negación. En efecto $R_k\, \tilde{N}_j\, R_k^{-1} = \tilde{N}_j\, R_{-k}\, R_k^{-1} = \tilde{N}_j\, R_{-2k} = \tilde{N}_{(j+2k)}$.

Las negaciones exóticas se transforman de una manera especial entre sí por las rotaciones. También interesa considerar el producto de dos negaciones.

Teorema 38 *El producto –aplicación sucesiva– de dos negaciones en **2Dn** es, según sea el caso:* $N_i\,N_j = R_{i+j+1}$, $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_j = R_{i-j}$, $N_i\,\tilde{N}_j = S_{i+j+1}$ *y* $\tilde{N}_j\,N_i = S_{j-i}$. *Las operaciones son módulo* n.

Demostración. Consideramos $N_i\,N_j\,d_k = N_i\,D_{j+k} = d_{i+j+k+1} = R_{i+j+1}\,d_k$. En el caso $N_i\,N_j\,D_k = N_i\,d_{j+k+1} = D_{i+j+k+1} = R_{i+j+1}\,D_k$ luego se cumple la primera ecuación. En las negaciones exóticas es: $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_j\,d_k = \tilde{N}_i\,D_{n-k+j} = d_{n-(n-k+j)+i} = d_{k-j+i} = R_{i-j}\,d_k$ y $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_j\,D_k = \tilde{N}_i\,d_{n-k+j} = D_{n-(n-k+j)+i} = D_{k-j+i} = R_{i-j}\,d_k$, luego se cumple la segunda ecuación. Consideremos

$$N_i\,\tilde{N}_j\,d_k = N_i\,D_{n-k+j} = d_{n-k+j+i+1} = S_{i+j+1}\,d_k.$$

En el caso $N_i\,\tilde{N}_j\,D_k = N_i\,d_{n-k+j} = D_{n-k+j+i} = S_{i+j+1}\,D_k$, luego se cumple la tercera ecuación. Consideremos

$$\tilde{N}_j\,N_i\,d_k = \tilde{N}_j\,D_{k+i} = d_{n-(k+i)+j} = S_{j-i}\,d_k.$$

Consideremos $\tilde{N}_j\,N_i\,D_k = \tilde{N}_j\,d_{k+i+1} = D_{n-(k+i+1)+j} = S_{j-i}\,D_k$, luego se cumple la cuarta ecuación. □

Una consecuencia de este teorema es que $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_i = R_0 = I$ donde I es la identidad. Las negaciones exóticas son *involutorias*. La estructura del grupo $\mathbf{G}_L$ de transformaciones del reticulado **2Dn** está formado por las n rotaciones, las n simetrías, las n negaciones comunes y las n negaciones exóticas, que son involutorias.

Teorema 39 *El producto –aplicación sucesiva– de una negación y una simetría en **2Dn** es, según sea el caso:* $S_jN_k = \tilde{N}_{j-k-1}$, $N_kS_j = \tilde{N}_{j+k}$, $S_j\tilde{N}_k = N_{j-k-1}$ *y* $\tilde{N}_k\,S_j = N_{k-j}$. *Todas las operaciones son módulo* n.

Demostración. Consideremos

$$S_jN_k\,d_i = S_jD_{i+k} = D_{n-(i+k)+j-1} = \tilde{N}_{j-k-1}d_i.$$

Consideremos $S_jN_kD_i = S_jd_{i+k+1} = d_{n-(i+k+1)+j} = \tilde{N}_{j-k-1}D_i$, luego está demostrada la primera igualdad. Consideremos $N_kS_jd_i =$

$N_k\, d_{n-i+j} = D_{n-i+j+k} = \tilde{N}_{j+k}\, d_i$. Consideremos

$$N_k S_j D_i = N_k\, D_{n-i+j-1} = d_{n-i+j-1+k+1} = \tilde{N}_{j+k}\, D_i,$$

luego está demostrada la segunda igualdad. Consideremos

$$S_j \tilde{N}_k\, d_i = S_j D_{n-i+k} = D_{n-(n-i+k)+j-1} = D_{i-k+j-1} = N_{j-k-1}\, d_i.$$

Consideremos

$$S_j \tilde{N}_k\, D_i = S_j\, d_{n-i+k} = d_{n-(n-i+k)+j} = d_{i-k+j} = N_{j-k-1}\, D_i,$$

luego está demostrada la tercera igualdad. Consideremos

$$\tilde{N}_k\, S_j\, d_i = \tilde{N}_k\, d_{n-i+j} = D_{n-(n-i+j)+k} = D_{i-j+k} = N_{k-j}\, d_i.$$

Consideremos

$$\tilde{N}_k\, S_j\, D_i = \tilde{N}_k\, D_{n-i+j-1} = d_{n-(n-i+j-1)+k} = d_{i-j+k-1} = N_{k-j}\, D_i,$$

luego está demostrada la cuarta igualdad. □

Este teorema completa las operaciones en el grupo $\mathbf{G}_L$ de automorfismos y negaciones del reticulado **L**.

Una observación interesante es que existen negaciones comunes que son *involutorias*. Para esto basta observar que $N_i\, N_i = R_{2i+1}$. Luego la condición para que N_j sea involutoria es que $2i+1 = 0$ (módulo n) y esto posee solución para n impar. Así por ejemplo en **2D5** la negación $N_2 = (01)(aC)(bD)(cE)(dA)(eB)$ es involutoria.

Las negaciones en **3Dn**

En la Figura 14 se presenta la notación empleada para los reticulados **3Dn** como extensión del caso **2Dn**: se emplean los símbolos C_i para los valores centrales –la *notación matemática*– en lugar de la *notación alfabética* $p, q, r, \ldots$ que es más compacta para presentar las tablas de verdad de las funciones.

Las negaciones en **3Dn** se buscan sistemáticamente mediante programas. Igual que en el caso anterior, se dividen en dos grupos de n negaciones cada uno: las negaciones normales y las negaciones exóticas. Las negaciones comunes en el caso **3Dn** son:

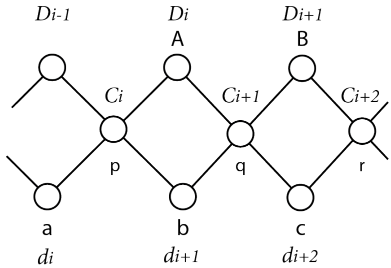


Figura 14: Las dos notaciones empleadas en **3Dn**.

- $N_0\, d_i = D_i \quad N_0\, C_i = C_{i+1} \quad N_0\, D_i = d_{i+2}$
- $N_1\, d_i = D_{i+1} \quad N_1\, C_i = C_{i+2} \quad N_1\, D_i = d_{i+3}$
- $\cdots$
- $N_{n-1}\, d_i = D_{i+n-1} \quad N_{n-1}\, C_i = C_i \quad N_{n-1}\, D_i = d_{i+n+1}$.

En resumen, la expresión general de las negaciones comunes, en el caso general, es:

$$N_j\, d_i = D_{i+j} \quad N_j\, C_i = C_{i+j+1} \quad N_j\, D_i = d_{i+j+2}$$

donde todas las operaciones se realizan en módulo n. La negación N_{n-1} corresponde a simetrizar el reticulado alrededor de los valores centrales y es involutoria. Así por ejemplo $N_{n-1}\, d_j = D_{n-1+j}$. Aplicando nuevamente $N_{n-1}\, D_{n-1+j} = d_{n-1+j+n-1+2} = d_{2n+j} = d_j$. Los valores centrales, $N_{n-1}\, C_i = C_{n-1+i+1} = C_i$, quedan inalterados.

Las negaciones exóticas en el caso **3Dn** son:

- $\tilde{N}_0\, d_i = D_{n-i} \quad \tilde{N}_0\, C_i = C_{n-i} \quad \tilde{N}_0\, D_i = d_{n-i}$
- $\tilde{N}_1\, d_i = D_{n-i+1} \quad \tilde{N}_1\, C_i = C_{n-i+1} \quad \tilde{N}_1\, D_i = d_{n-i+1}$
- $\cdots$
- $\tilde{N}_{(n-1)}\, d_i = D_{-i-1} \qquad \tilde{N}_{(n-1)}\, C_i = C_{-i-1}$
  $\tilde{N}_{(n-1)}\, D_i = d_{-i-1}$.

En resumen, la expresión general de las negaciones exóticas es:

$$\tilde{N}_j\, d_i = D_{n-i+j} \quad \tilde{N}_j\, C_i = C_{n-i+j} \quad \tilde{N}_j\, D_i = d_{n-i+j}$$

donde todas las operaciones se realizan en módulo n. Por supuesto que es necesario demostrar que estas expresiones cumplen De Morgan. Se omite esta demostración porque no agrega demasiado respecto a la ya presentada para **2Dn**.

Teorema 40 *Para las negaciones comunes en* ***3Dn*** *son válidas las ecuaciones:* $R_k\,N_j = N_j\,R_k = N_{j+k}$. *Las operaciones son módulo* n *y* k *puede ser negativo.*

Demostración. Sea $R_k\,N_j\,d_i = R_k\,D_{i+j} = D_{i+j+k} = N_{j+k}\,d_i$. Sea $R_k\,N_j\,C_i = R_k\,C_{i+j+1} = C_{i+j+k+1} = N_{j+k}\,C_i$. Sea $R_k\,N_j\,D_i = R_k\,d_{i+j+2} = d_{i+j+k+2} = N_{j+k}\,D_i$. Si consideramos el producto al revés se tiene $N_j\,R_k\,d_i = N_j\,d_{i+k} = D_{i+j+k}$ igual que en el producto anterior. Del mismo modo ocurre $N_j\,R_k\,C_i = N_j\,C_{i+k} = C_{i+j+k+1}$ y $N_j\,R_k\,D_i = N_j\,D_{i+k} = d_{i+j+k+2}$ tal como se debía demostrar. $\square$

Este teorema muestra que las negaciones comunes son invariantes en la rotaciones del reticulado.

Teorema 41 *El producto –aplicación sucesiva– de dos negaciones en* ***3Dn*** *es, según sea el caso:* $N_i\,N_j = R_{i+j+2}$ *y* $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_j = R_{i-j}$. *Las operaciones son módulo* n.

Demostración. Sea $N_i\,N_j\,d_k = N_i\,D_{j+k} = d_{i+j+k+2} = R_{i+j+2}\,d_k$. Sea $N_i\,N_j\,C_k = N_i\,C_{j+k+1} = C_{i+j+k+2} = R_{i+j+2}\,C_k$. Sea $N_i\,N_j\,D_k = N_i\,D_{j+k+2} = d_{i+j+k+2} = R_{i+j+2}\,d_k$, luego está demostrado para las negaciones comunes. Sea $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_j\,d_k = \tilde{N}_i\,D_{n-k+j} = d_{n-(n-k+j)+i} = d_{k+i-j} = R_{i-j}\,d_k$. En los demás casos ocurre lo mismo porque las transformaciones son iguales, luego está demostrado. $\square$

Luego todas las negaciones exóticas son invocatorias –puesto que $\tilde{N}_i\,\tilde{N}_i = R_0 = I$– como en **2Dn**. También existe una negación común involutoria si $2i + 2 = 0$ (módulo n).

Como en el caso anterior se cumple el Teorema 39, la demostración es igual y se omite.

Generalidades del grupo de automorfismos y negaciones

En esta sección se resumen los diferentes resultados obtenidos sobre los automorfismos y negaciones en los reticulados **rDn**. En el Cuadro 7 hay reiteración ordenada de los resultados obtenido en los Teoremas 2, 8, 9, 36, 37, 38 y 39, demostrados para **2Dn**. Se entiende que el resultado es la aplicación sucesiva de el elemento de la fila y luego el de la columna.

Cuadro 7: Aplicación sucesiva de automorfismos y negaciones.

$\times$	R_k	S_k	N_k	$\tilde{N}_k$
R_j	R_{j+k}	S_{j+k}	N_{j+k}	$\tilde{N}_{j+k}$
S_j	S_{j-k}	R_{j-k}	$\tilde{N}_{j-k-1}$	N_{j-k-1}
N_j	N_{j+k}	$\tilde{N}_{j+k}$	R_{j+k+1}	S_{j+k+1}
$\tilde{N}_j$	$\tilde{N}_{j+k}$	N_{k-j}	S_{j-k}	R_{j-k}

Las demostraciones se extienden naturalmente a los reticulados **rDn** por recurrencia, tal como se ha ejemplificado en algunos casos de **3Dn**.

La penetración de los contrarios

Introducción

La dialéctica espontánea, y también el esbozo de formalización de Hegel, introducen dos nuevas nociones que son ajenas a la lógica binaria: la *unidad y lucha de los contrarios* –también llamada *penetración de los contrarios*– y el *devenir*. Estas nociones hay sido introducidas intuitivamente en los capítulos iniciales. Para la lógica binaria la existencia de contrarios es una evidencia de la falsedad de una teoría: no pueden coexistir. Lo mismo sucede con la noción de devenir: los enunciados de la lógica son eternos e inmutables, nada puede ser hoy verdadero y mañana falso.

¿Qué son entonces la penetración de los contrarios o el devenir? Son funciones lógicas de dos variables definidas en los reticulados dialécticos. Estas funciones expresan la unidad y lucha de los contrarios y la negación de negación, empleando el lenguaje hegeliano. También describen, respectivamente, a los contrarios sincrónicos y diacrónicos. Extienden el significado de las funciones lógicas binarias. Esto quiere decir que, aplicadas a los valores 0 y 1 deben dar como resultado solamente valores 0 o 1, o sea, deben coincidir con funciones lógicas binarias conocidas. Esta primera condición se puede llamar *principio de permanencia de las propiedades binarias* o el *principio de permanencia* a secas, abreviado como PP.

Una segunda consideración es válida. Puesto que los reticulados dialécticos poseen rotaciones, derivados de la definición de los reticulados dialécticos, es necesario que estas funciones dialécticas sean invariables en las rotaciones. Si no fuese así, habría valores dialécticos privilegiados en contradicción con la evidencia de la simetría generada por las rotaciones. Esta segunda condición es llamada *invarianza en la rotación*, abreviado como IR.

En la búsqueda de las funciones penetración, además de los principios de permanencia y de rotación debemos considerar las propiedades formales que derivan de la aplicación espontánea de estas nociones, tal como ocurren en los diversos ejemplos citados en la exposición de las dialécticas naturales.

Generalidades sobre la penetración dialéctica

Analicemos ahora algunos casos de la penetración tal como se la emplea en las lenguas naturales. A partir de este uso es posible extraer las propiedades formales que cumplen desde el punto de vista dialéctico. Comencemos por las conjunciones adversativas.

Los sonetos sobre el amor muestran otro aspecto de la penetración dialéctica. Consideremos el enunciado de Lope con ligeros cambios de presentación:

> desmayarse, atreverse, estar furioso, áspero, tierno, liberal, esquivo, alentado, mortal, difunto, vivo, leal, traidor, cobarde, animoso.

Intentemos ahora formalizar las penetraciones por la vía de realizar asociaciones. Parece claro que la idea que se expresa es esta:

> (desmayarse, atreverse, estar furioso), (áspero, tierno), (liberal, esquivo, alentado), (mortal, difunto, vivo), (leal, traidor), (cobarde, animoso).

Se puede apreciar que hay *pares* contrarios –como (leal, traidor) o (cobarde, animoso)–, pero también existen *ternas* de contrarios como (desmayarse, atreverse, estar furioso) o (mortal, difunto, vivo). En este ejemplo es indudable que la penetración lógica es *conmutativa*, el orden de los términos no importa en ninguno de los casos. El análisis de los casos triples exige alguna consideración adicional que se presenta más adelante.

Por otra parte, también parece claro que podría haber en este texto dos tipos de comas: unas reemplazan a la penetración dialéctica y las otras –las que unen los pares o ternas de contrarios– tanto podría ser una función **Y** como una función **O** o también una penetración conmutativa. Este punto exige un análisis adicional. Si aceptamos que se trata de **Y**, el enunciado afirma que el amor contiene *todas* las contradicciones, algo que es verdaderamente exagerado. Si aceptamos que se trata de **O**, el enunciado afirma que es suficiente tener *algunas* de las contradicciones de la lista para definir al amor. Sin embargo parece más clara la idea que no es ni **Y** ni **O** lo que se afirma sino una función lógica *intermedia de ambas*, ni tan fuerte como **Y** ni tal laxa como **O**. Por esta razón parece que también el segundo tipo de comas reemplaza una penetración, la cual es, forzosamente, *conmutativa*, además de *asociativa*.

Examinemos ahora el problema de las ternas contrarias. Para que una terna tenga sentido es necesario que la penetración sea –al menos en algunos casos– *asociativa*, de otra manera no tendría sentido.[123] Así por ejemplo, el orden de la terna no es importante y esto exige que las dos propiedades, conmutativa y asociativa sean válidas en la unidad y lucha de los contrarios.

En una forma intuitiva podemos definir a la penetración como una función que cumple con las propiedades:

- es asociativa (A) y conmutativa (C),
- cumple con el principio de permanencia de las propiedades binarias (PP),
- es invariante en la rotación de los elementos (IR),
- es una función dialéctica que está a medio camino entre **O** e **Y**, tiene la propiedad de penetración dialéctica (PD).

Esta última propiedad agrega un elemento formal nuevo. Puesto que $x \,.\, x = x + x = x$ debemos agregar a este conjunto de propiedades que la función es *idempotente* (I).

En el Cuadro 8 se presenta el esquema general de una función penetración. La función $g(x, y)$ es la parte esencial de la función y posee

[123] El ejemplo de Lope muestra también *los límites de la propiedad asociativa*. Es difícil aceptar esta igualdad: (desmayarse, atreverse, estar furioso), (áspero, tierno), (liberal, esquivo, alentado), (mortal, difunto, vivo), (leal, traidor), (cobarde, animoso) = (desmayarse, atreverse), (estar furioso, áspero), (tierno, liberal, esquivo), (alentado, mortal), (difunto, vivo, leal), (traidor, cobarde, animoso). Esto sugiere que los dos tipos de comas son *funciones panetración diferentes*. Esto se aclara en lo que sigue.

Cuadro 8: Esquema general de las funciones penetración.

	0	dialécticos	1
0	0	$f_1(y)$	0, 1
dialécticos	$f_1(x)$	$g(x, y)$	$f_2(x)$
1	0, 1	$f_2(y)$	1

las propiedades I, A, C y PD. Los valores correspondientes a $0 * 0 = 0$ y $1 * 1 = 1$ son consecuencia de la idempotencia. Las funciones f_1, f_2 también poseen las propiedades I, A, C y PD. PP es evidente.

El desarrollo que sigue muestra que existen dos tipos de funciones penetración que hemos llamado *penetraciones amplias* y las *penetraciones estrictas*. Las penetraciones amplias cumplen la propiedad PD para todo par de elementos del reticulado y son importantes para la noción de *cuantificadores*. Las penetraciones estrictas cumplen la propiedad PD solamente cuando la penetración de los contrarios es una tesis. Este segundo tipo de penetraciones es importante, además de los cuantificadores, por su vinculación con la idea de devenir de los contrarios.

Propiedad general de las penetraciones dialécticas

La propiedad genérica de la función penetración consiste en poseer un valor lógico intermedio de las funciones **Y** y **O**. Para definirla se deben cumplir un conjunto de propiedades formales y semánticas. El análisis de estas propiedades es el tema central de esta sección.

El punto de partida es un conjunto de teoremas auxiliares previos a la definición formal de la función penetración.[124] Para esto es necesario introducir la noción de semi–reticulado.[125]

[124] Los teoremas considerados son resultados conocidos, ver Birkhoff [4, II, 3, Ex.1], pero especializados sobre los semi–reticulados.

[125] En este caso se emplea una operación $\diamond$ que posee las propiedades formales de una suma en un reticulado. También se puede definir un semi–reticulado *dual* mediante una operación $\odot$ que tenga formalmente las propiedades de un producto. Es el mismo caso al simetrizar la estructura del reticulado.

Definición 24 *Un conjunto de elementos* **S** *es un* semi–reticulado *si, para todo par x, y de sus elementos, existe una operación $x \diamond y \in$* **S** *con las propiedades:*

1. Idempotencia *(I). Se cumple que $x \diamond x = x$.*
2. Asociativa *(A). Se cumple que $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$.*
3. Conmutativa *(C). $x \diamond y = y \diamond x$.*

En un semi–reticulado con una operación $\diamond$ *no trivial*[126] que tenga las propiedades I, A, C se pude definir un orden parcial (que justifica el nombre de semi–reticulado).

Teorema 42 *Si $\diamond$ es una operación* no trivial, *entre elementos de un conjunto* **S**, *que posee las propiedades I, A, C, entonces es un conjunto parcialmente ordenado que posee la relación $x \leq y$ definida como $x \diamond y = y$. La operación $+$ está definida por $x + y = x \diamond y$.*

Demostración. La relación $x \leq y$ definida como $x \diamond y = y$ es una relación de orden porque cumple: 1) la idempotencia por la propiedad I; 2) si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces se tiene $x = x \diamond y = y$; 3) la transitividad porque si $x \leq y$ y $y \leq z$ se tiene $x \diamond y = y$, $y \diamond z = z$, pero por la propiedad A, ocurre $x \diamond z = x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z = y \diamond z = z$ luego $x \leq z$. Falta demostrar que si $z \geq x, z \geq y$ entonces $z \geq x + y = x \diamond y$ –o sea $z = z \diamond (x \diamond y)$– para que $x + y$ sea la mínima cota superior. Por hipótesis, $z = z \diamond x, z = z \diamond y$ luego $z = (z \diamond x) \diamond y = z \diamond (x \diamond y)$ por A, tal como se debía demostrar. □

También vale el teorema recíproco.[127]

---

[126] La operación es trivial si cumple que para todo par de elementos $x \neq y$ se cumple que $x \diamond y = a$, donde a es siempre el mismo elemento del conjunto.

[127] Son válidos los teoremas duales en los cuales se define una operación $x \,.\, y = x \diamond y$ y la relación $x \leq y$ definida como $x \diamond y = x$. Las demostraciones se realizan de la manera dual. No obstante esto, en las aplicaciones *consideraremos siempre el caso suma*.

Teorema 43 *Si* ***S*** *es un semi–reticulado para la operación* $+$*, entonces la operación* $\diamond$ *definida como* $x \diamond y = x + y$ *posee las propiedades I, A, C.*

Demostración. La demostración es inmediata: 1) la operación $+$ es idempotente; 2) la operación $+$ es asociativa; 3) la operación $+$ es conmutativa. □

Las penetraciones amplias

Establecidos estos resultados, es posible ahora definir la función penetración con carácter general.

Definición 25 *Se llama función* penetración amplia, *o simplemente* penetración, *a una operación binaria en un reticulado* ***L****, expresada como* $x * y$*, donde* $x, y \in$ ***L****, que cumple:*

1. *las* propiedades formales *I, A, C;*
2. *el* principio de permanencia *de propiedades binarias PP;*
3. Invariante en rotación *(IR): si* $x * y = z$ *entonces, si* R *es una rotación de reticulado, se cumple* $R\,x * R\,y = R\,z$*.*
4. Penetración dialéctica *(PD): dos elementos* x, y *cumplen que* $x \,.\, y \leq x * y \leq x + y$*.*

El siguiente teorema vincula la función penetración con las negaciones comunes.

Teorema 44 *Si* $*$ *es una función penetración en un reticulado dialéctico y* N *es una negación común, entonces la función definida como* $*_n = N^{-1}(N\,x * N\,y)$ *también define una penetración* simétrica*. Esta función es independiente de la negación* N *empleada.*

Demostración. Consideremos las propiedades ordenadamente.

I La función definida es idempotente puesto que $N^{-1}(N\,x{*}N\,x) = N^{-1}N\,x = x$.

C Es conmutativa, puesto que $N^{-1}(N\,x{*}N\,y) = N^{-1}(N\,y{*}N\,x)$.

A Es asociativa puesto que $(N\,x * N\,y) * N\,z = N\,x * (N\,y * N\,z)$ por la propiedad A de $*$. Introduciendo $N\,N^{-1}$ –la identidad– se obtiene $N\,N^{-1}(N\,x * N\,y) * N\,z = N\,x * N\,N^{-1}(N\,y * N\,z)$. Agregando paréntesis para mayor claridad y aplicando N^{-1} resulta $N^{-1}(N\,(N^{-1}(N\,x{*}N\,y)){*}N\,z) = N^{-1}(N\,x{*}N\,(N^{-1}(N\,y{*}N\,z)))$ que es la expresión de la propiedad A para la función definida.

IR Es invariante en la rotación puesto que $N^{-1}(R\,N\,x * R\,N\,y) = N^{-1}R(N\,x * N\,y) = R\,N^{-1}(N\,x * N\,y)$ porque las negaciones comunes conmutan con R.

PD Se cumple $N\,x\,.\,N\,y \leq N\,x{*}N\,y \leq N\,x{+}N\,y$ por la propiedad PD de $*$. Aplicando la negación N^{-1} a estas relaciones se obtiene $x + y \geq N^{-1}(N\,x * N\,y) \geq x\,.\,y$ que demuestra PD para la función definida.

Toda negación común se puede expresar como $N = N_0\,R^i$ y $N^{-1} = N_0\,R^{n-i}$. Luego $N^{-1}(N\,x * N\,y) = R^{n-i}N_0^{-1}(R^i\,N_0\,x * R^i\,N_0\,y) = R^{n-i}N_0^{-1}\,R^i(N_0\,x * N_0\,y) = N_0^{-1}(N_0\,x * N_0\,y)$ puesto que las penetraciones cumplen IR, luego la función definida es independiente de la negación común empleada. Este resultado depende de la propiedad conmutativa de las negaciones comunes con las rotaciones. $\square$

Las funciones penetración amplia se definen también mediante la siguiente definición.

Definición 26 *La función* penetración amplia $*$ *en el reticulado dialéctico* **L** *se define como: para* $x, y < 1$ *entonces* $x * y = x\,.\,y$, *para todo* x *entonces* $x * 1 = 1 * x = 1$.
La función penetración amplia $*_n$ *se define como: para* $x, y > 0$ *entonces* $x *_n y = x + y$, *para todo* x *entonces* $x *_n 0 = 0 * n\,x = 0$. *Equivalentemente* $*_n$ *se puede definir por el teorema 44.*

Las definiciones 25 y 26 coinciden tal como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 45 *Las dos definiciones de penetración amplia, 25 y 26, son equivalentes.*

Demostración. La Definición 26 cumple con la Definición 25. En efecto, demostremos ordenadamente las propiedades:

I se cumple por la idempotencia de la suma y del producto.

C se cumple por la conmutativa de la suma y del producto y por las definiciones explícitas en los casos 0 y 1 respectivamente.

A se cumple por la propiedad asociativa de la suma y el producto. Para el caso 1 ocurre que si uno o más de valores que intervienen es 1 el resultado es 1 de cualquier manera que se los asocie; así por ejemplo, $x * (y * 1) = x * 1 = 1$ y $(x * y) * 1 = (x \,.\, y) * 1 = 1$. Los demás casos sin similares y lo mismo vale para $*_n$ y 0.

IR se cumple porque la suma y el producto son invariables en la rotación, también lo son 0 y 1.

PD se cumple por definición. Así por ejemplo, $x \,.\, y \leq x * y = x + y \leq x + y$. Para el caso 1 ocurre $x = x \,.\, 1 \leq x * 1 = 1 \leq x + 1 = 1$. Lo mismo vale para $*_n$ y 0.

La Definición 25 cumple con la Definición 26. Consideremos ahora los semi–reticulados de la Figura 15 formados por los elementos 0 y 1 y el conjunto **D** de sus valores dialécticos o de su negación ***N*D**. Por su estructura es un conjunto parcialmente ordenado por una operación $\leq$ de los elementos del reticulado dialéctico.

De acuerdo con el Teorema 42 referente a las propiedades de las funciones con propiedades I, A, C, estas funciones son una suma en un semi–reticulado definido por esta penetración. Consideremos el caso de cada semi–reticulado. Analizaremos por orden las propiedades:

I: es inmediata, igual que A y C, puesto que la suma tiene estas propiedades.

IR: es válida porque **D** es invariable en la rotación.

PD: se cumple por una adecuada elección de los contrarios como se ve en los ejemplos que siguen.

Luego queda demostrado el teorema. □

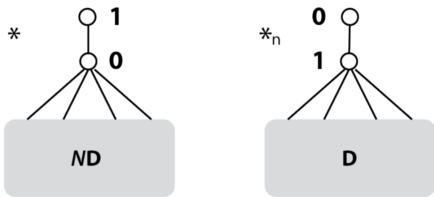


Figura 15: Semi–reticulados para las funciones penetración amplia.

Consideremos dos funciones penetración, $*', *''$ en un reticulado. Mediante ellas se pueden construir funciones *penetración amplias* –que no cumplen con la propiedad asociativa– mediante la suma.

> **Teorema 46** *La función definida como* $x * y = x *' y + x *'' y$ *–donde* $*'$ *y* $*''$ *son penetraciones que cumplen I, C, A, IR y PD– es una* penetración amplia *que cumple con I, C, IR y PD pero no con A.*

Demostración. Las propiedades I, C son inmediatas puesto que tanto $*'$ como $*''$ la cumplen. La propiedad IR también porque cada una la cumple y la suma también cumple IR. Sean ahora x, y, se cumplen las desigualdades:

$$x \,.\, y \leq x *' y \leq x + y \qquad x \,.\, y \leq x *'' y \leq x + y.$$

Sea, por ejemplo, $x \,.\, y \leq x *' y$ y $x \,.\, y \leq x *'' y$ de aquí se deduce, por la monotonía de la suma $x \,.\, y \leq x *' y + x *'' y$. En forma dual se demuestra la otra desigualdad. La "suma" de penetraciones no cumple con A porque en **3Dn** –ver Cuadro 11– se cumple $(a * b) * p = (0 + 0) * p = 0$ por PB. En cambio $a * (b * p) = a * (0 + p) = a * p = p + 0 = p$, con lo cual queda demostrado por la vía de un contraejemplo. □

Las penetraciones amplias en **Dn**

Las funciones penetración de rango 1 poseen propiedades muy simples, algo que no ocurre en los rangos mayores. La búsqueda sistemática de las funciones, además de **Y**, **O**, muestra que hay solamente dos funciones que se presentan en el Cuadro 9.

De acuerdo con el Teorema 45 existen dos semi–reticulados en **Dn** cuyas *sumas* generan estas funciones. En la Figura 16 se ilustran en el caso **D4**.

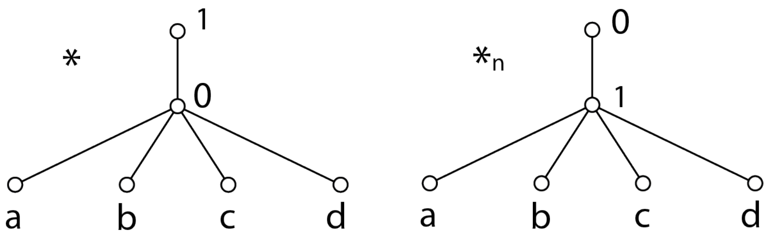


Figura 16: Semi–reticulados para las funciones penetración en **D4**.

Este diagrama ilustra el Teorema 44. Si aplicamos una negación N a uno de los semi–reticulados, se obtiene el otro. En efecto, los cuatro elementos se convierten en sí mismos y se intercambian los valores 1 y 0. Estas penetraciones son simétricas. La manera de generar las funciones permite su generalización en reticulados de mayor rango.

Cuadro 9: Tablas de las penetraciones dialécticas en **D4**.

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	1
a	0	a	0	0	0	1
b	0	0	b	0	0	1
c	0	0	0	c	0	1
d	0	0	0	0	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$*_n$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	1	1	1	1
b	0	1	b	1	1	1
c	0	1	1	c	1	1
d	0	1	1	1	d	1
1	0	1	1	1	1	1

Las penetraciones amplias en **2Dn**

Las funciones penetración en **2Dn** se pueden obtener a partir del Teorema 45 y de lo observado en el caso **D4**. En la Figura 17 se presentan dos semi–reticulados que generan las funciones penetración. Estas penetraciones son simétricas.

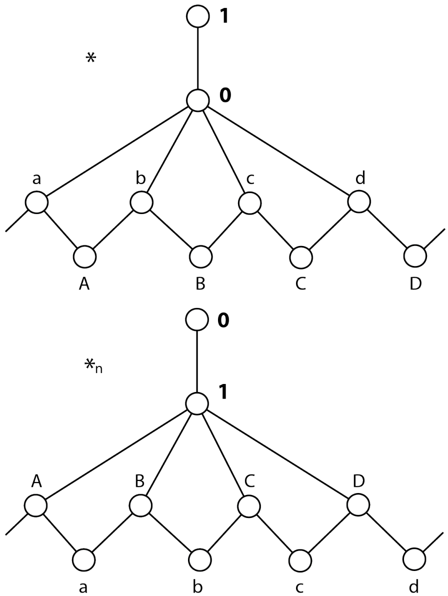


Figura 17: Semi–reticulados para las funciones penetración en **2D4**.

En el Cuadro 10 se presentan las tablas de verdad de las funciones penetración correspondientes. Esta manera de generar a partir de los reticulados es general para todos los reticulados **rDn**. Por claridad se omiten los 0 en la zona dialéctica.

Hay una observación general que se aplica a las penetraciones analizadas. Por la relaciones establecidas en la definición se puede elaborar el diagrama de la Figura 18. Las relaciones de orden permiten construir un reticulado **D2** que establece estas relaciones. Como es inmediato, este reticulado –que construye una dialéctica *yin-yang*– posee una negación que transforma entre sí suma y producto y además $*$ con $*_n$. Es inmediato que se cumple el Teorema 47. Estos resultados tienen interés para analizar los cuantificadores dialécticos, ver el capítulo correspondiente.

Cuadro 10: Tablas de las penetraciones dialécticas en **2D4**.

$*$	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a	0	a				a			a	1
b	0		b			b	b			1
c	0			c			c	c		1
d	0				d			d	d	1
A	0	a	b			A	b		a	1
B	0		b	c		b	B	c		1
C	0			c	d		c	C	d	1
D	0	a			d	a		d	D	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$*_n$	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	A	1	D	A	1	1	D	1
b	0	A	b	B	1	A	B	1	1	1
c	0	1	B	c	C	1	B	C	1	1
d	0	0	1	C	d	1	1	C	D	1
A	0	A	A	1	1	A	1	1	1	1
B	0	1	B	B	1	1	B	1	1	1
C	0	1	1	C	C	1	1	C	1	1
D	0	D	1	1	D	1	1	1	D	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

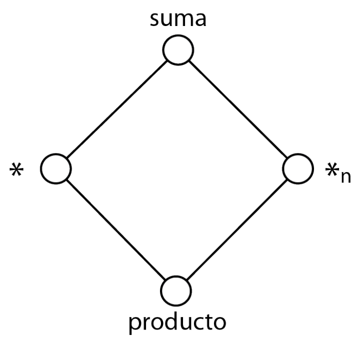


Figura 18: Diagrama que relaciona suma, producto y penetraciones

Teorema 47 *Las funciones penetración amplia cumplen con:*

$$x * y = x \,.\, y + U(x, 1) + U(y, 1)$$

$$x *_n y = (x + y) \,.\, U(x, 0) \,.\, U(y, 0)$$

donde $U(x, a)$*, y lo mismo para y, son las funciones unitarias, Definición 21.*

Demostración. Consideremos el caso $*_n$. Por la definición es claro que para para 1 o los valores dialécticos se cumple $x *_n y = x + y$. En cambio se cumple, para esos mismos valores, $x *_n 0 = 0$, luego es claro que se cumple la segunda igualdad puesto que $N\,U(x, 0)$ vale 1 para todo $x \neq 0$ y 0 para $x = 0$. Lo mismo ocurre con $N\,U(y, 0)$. Luego está demostrada la segunda ecuación. La primera es consecuencia de lo demostrado, aplicado a Nx, Ny y del Teorema 44 que conduce a $x \,.\, y + U(Nx, 0) + U(Ny, 0)$ que es equivalente a la primera ecuación. Queda demostrada la primera ecuación. $\square$

Es inmediato que este teorema vale en **Dn** y también en el caso general **rDn** por la manera como se construyen las funciones penetración.

Las penetraciones amplias en **3Dn** y siguientes

Las penetraciones en **3Dn** y en reticulados más complejos siguen el mismo esquema que los casos anteriores. En el Cuadro 11 se presenta la penetración $*$. La penetración $*_n$ se obtiene por transformación mediante una negación cualquiera del reticulado, ver el Teorema 44. Se omiten los valores 0 en la zona dialéctica.

En el reticulado **3D5** y siguientes también cumplen que las penetraciones son simétricas. También se cumple el diagrama de la Figura 18 y el Teorema 47.

Las penetraciones estrictas en **3Dn** y siguientes

Es claro que el Teorema 47 muestra que las penetraciones amplias son solamente una pequeña modificación de las operaciones del reti-

Cuadro 11: Tabla de verdad de la penetración $*$ en **3D5**.

$*$	0	a	b	c	d	e	p	q	r	s	t	A	B	C	D	E	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
a	0	a					a				a	a			a	a	1
b	0		b				b	b				b	b			b	1
c	0			c				c	c			c	c	c			1
d	0				d				d	d			d	d	d		1
e	0					e				e	e			e	e	e	1
p	0	a	b				p	b			a	p	b		a	p	1
q	0		b	c			b	q	c			q	q	c		b	1
r	0			c	d			c	r	d		c	r	r	d		1
s	0				d	e			d	s	e		d	s	s	e	1
t	0	a				e	a			e	t	a		e	t	t	1
A	0	a	b	c			p	q	c		a	A	q	c	a	p	1
B	0		b	c	d		b	q	r	d		q	B	r	d	b	1
C	0			c	d	e		c	r	s	e	c	r	C	s	e	1
D	0	a			d	e	a		d	s	t	a	d	s	D	t	1
E	0	a	b			e	p	b		e	t	p	b	e	t	E	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

culado. La noción intuitiva de penetración parece exigir funciones con propiedades más exigentes. Esto ocurre con las penetraciones estrictas, tema de análisis de esta sección.

Los reticulados **3Dn** son los más simples en los cuales se pueden definir funciones penetración $\bar{*}$ *estrictas*. Se trata de una nueva función penetración que puede definirse y que tiene importancia por su vinculación con la función devenir. Estas funciones se generan a partir de un nuevo ordenamiento de los elementos dialécticos.

Analizaremos el caso **3D5** como ejemplo de la función general. En la Figura 29 se presenta la notación empleada. En este caso se emplea la notación alfabética.

Consideremos los valores a, p, A como primer caso de estudio. Se trata de darle significado a la expresión $x \,.\, y \leq x \,\bar{*}\, y \leq x + y$, siempre que $x \,\bar{*}\, y$ sea una tesis, equivalentemente que $x \,\bar{*}\, y \neq 0$. Por la semántica de la penetración parece natural elegir la definición $a \,\bar{*}\, A = p$ por-

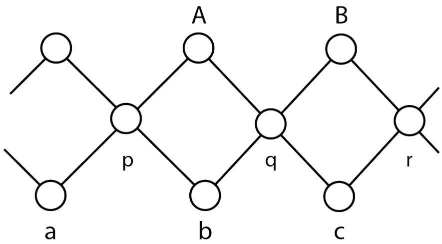


Figura 19: Diagrama simplificado del reticulado **3Dn**.

que p es un valor *intermedio* entre a y A.[128] Luego de adoptar este criterio sigue naturalmente que $A \,\bar{*}\, p = p$, $a \,\bar{*}\, p = p$ y $p \,\bar{*}\, p = p$. Por otra parte, también ocurre naturalmente $a \,\bar{*}\, a = a$ y $A \,\bar{*}\, A = A$. De estas expresiones resulta que para la terna a, p, A, $\bar{*}$ es conmutativa, asociativa e idempotente.

Del mismo modo podemos obtener por rotación que las ternas b, q, B y las obtenidas por rotación también lo son. Con idéntico razonamiento se puede considerar que b, p, E o c, q, A también generan una función penetración, pero diferente. Llegados a este punto también debemos aceptar que las ternas b, p, A o c, q, B presentan otro caso, así como b, q, A o c, q, B. En definitiva, estas consideraciones permiten definir nuevas funciones penetración diferentes que las penetraciones comunes.

En las consideraciones anteriores no se han considerado los valores 0 y 1. La idea de estas nuevas funciones penetración es elegir funciones que solamente vinculen tesis formadas por elementos dialécticos. De esta manera se complementan las siguientes expresiones $d \,\bar{*}\, 0 = 0 \,\bar{*}\, d = 0$, donde d es un valor cualquiera. En los hechos las penetraciones estrictas importan principalmente por los valores dialécticos, por eso la definición no determina los casos $d \,\bar{*}\, 1 = 1 \,\bar{*}\, d$ que deben determinarse por consideraciones semánticas adicionales. Las nuevas funciones penetración operan estrictamente entre tesis dialécticas y por esta razón se pueden llamar *penetraciones estrictas*, no involucran a los

[128] La tríada masónica –libertad, igualdad, fraternidad– suministra un ejemplo interesante de esta idea. Está formada por dos elementos contrarios, libertad e igualdad, y una síntesis, la fraternidad. Es claro que si los seres humanos fuesen verdaderamente fraternales, serían libres e iguales.

valores no dialécticos. Estas consideraciones conducen a la siguiente definición.

Definición 27 *Se llama* penetración estricta $\bar{*}$ *a una función de dos variables en un reticulado dialéctico que posee las propiedades:*

1. $\bar{*}$ *posee las propiedades I, A, C, IR;*
2. *propiedad de penetración binaria (PB): si x es un elemento del reticulado, se cumple $x \,\bar{*}\, 0 = 0 \,\bar{*}\, x = 0$ pero no se definen condiciones semánticas para $x \,\bar{*}\, 1 = 1 \,\bar{*}\, x$;*
3. *propiedad de penetración dialéctica (PD): si x, y cumplen que si $x \,\bar{*}\, y$* es una tesis*, entonces se cumple $x \,.\, y \leq x \,\bar{*}\, y \leq x + y$.*

Vale la pena observar que la condición 2 es compatible con las propiedades I, C, IR. I y C las cuales son inmediatas por definición. La propiedad asociativa tiene varios casos que se demuestran todos en forma similar. Consideremos un par de casos representativos: $(0 \,\bar{*}\, 1) \,\bar{*}\, x = 0 \,\bar{*}\, (1 \,\bar{*}\, x) = 0$, $(x \,\bar{*}\, y) \,\bar{*}\, 0$ se separa en dos casos 1) si $z = x \,\bar{*}\, y$ es una tesis $z \neq 0$ entonces vale $z \,\bar{*}\, 0 = 0$, 2) si $x \,\bar{*}\, y = 0$ entonces también vale 0.

Si en la Definición 27 se usa como condiciones semánticas adicionales $x \bar{*}^0 1 = 0$, $x \bar{*}^d 1 = x$ o $x \bar{*}^1 1 = 1$, donde x es un valor cualquiera del reticulado y se verifican las propiedades de la Definición 27.[129]

Las penetraciones estrictas pueden obtenerse también como sumas en un semi–reticulado tal como se muestra en la Figura 20, donde **cD** es una disposición adecuada de los elementos dialécticos del reticulado tal como muestran las Figuras 22 y 23.

Teorema 48 *Las* penetraciones estrictas *en los reticulados* ***3Dn*** *cumplen con las expresiones del Cuadro 12 excepto para el valor 1.*

[129] Vale la pena observar que un resultado del tipo $x * 1 = R\,x$ no cumple la propiedad PD. Así por ejemplo, $a = a \,.\, 1 \not\leq a \bar{*} 1 = b = R\,a$ y similar para R^i. El caso $x \bar{*} 1 = 1$ no parece tener aplicaciones de interés.

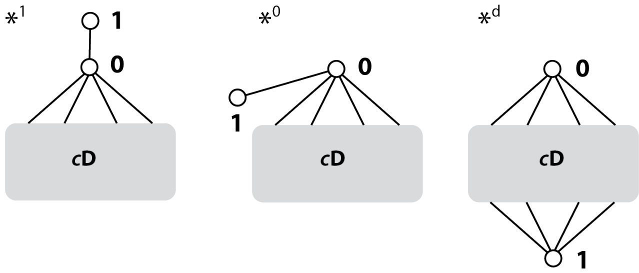


Figura 20: Semi–reticulados para las funciones penetración estricta.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 42, estas funciones –que cumplen I, A, C– son operaciones suma en semi–reticulados que deben cumplir con la condición PD. En la Figura 21 se presenta los esquemas que permiten escribir estas funciones. A los efectos de cumplir la condición PD, los contrarios –átomos y máximos– para que la función penetración no sea 0 deben cumplir alguna de las condiciones de la figura, deben ser próximos. En este caso se cumplen las condiciones de contrarios:

$$N_0\, d_i = D_i \quad N_{n-1} d_i = D_{i-1} \quad N_{n-1} D_i = d_{i+1} \quad N_{n-2}\, d_{i+1} = D_{i-1}$$

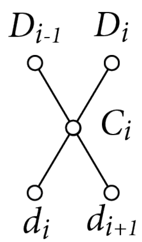


Figura 21: Diagrama para las funciones penetración estrictas en **3Dn**.

En el Cuadro 12 se encuentran las expresiones genéricas de las cuatro penetraciones estrictas. Se han omitido las ecuaciones de idempotencia –del tipo $D_i \,\bar{*}_j D_i = D_i$ y demás para los átomos y elementos centrales– y los valores 0 por ser comunes a todas las funciones. Es claro que faltan las funciones donde intervienen los elementos 0 y 1. Existen cuatro funciones penetración estrictas. □

Cuadro 12: Expresiones de las funciones penetración en **3Dn**

$d_i \,\bar{*}_1 D_i = C_i$	$d_i \,\bar{*}_1 C_i = C_i$	$D_i \,\bar{*}_1 C_i = C_i$
$d_i \,\bar{*}_2 D_{i-1} = C_i$	$d_i \,\bar{*}_2 C_i = C_i$	$D_{i-1} \,\bar{*}_2 C_i = C_i$
$d_{i+1} \,\bar{*}_3 D_i = C_i$	$d_{i+1} \,\bar{*}_3 C_i = C_i$	$D_i \,\bar{*}_3 C_i = C_i$
$d_{i+1} \,\bar{*}_4 D_{i-1} = C_i$	$d_{i+1} \,\bar{*}_4 C_i = C_i$	$D_{i-1} \,\bar{*}_4 C_i = C_i$

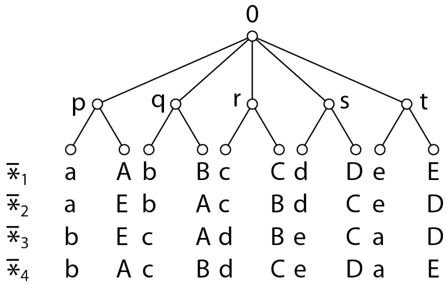


Figura 22: Semi–reticulados para las funciones penetración en **3D5**.

En el Cuadro 13 se presenta la tabla de verdad de la función penetración dialéctica $\bar{*}_1$ para este reticulado. Se han omitido los valores 0 en la zona dialéctica para mayor claridad de la presentación. La función así definida cumple con las propiedades I, A, C, IR, PB y PD.

En la Figura 22 están los cuatro esquemas de los semi–reticulados que generan las funciones. Se ha omitido el valor 1 por tener un tratamiento separado en el semi–reticulado como muestra la Figura 20.

Las penetraciones estrictas *no son penetraciones amplias*. Consideremos, por ejemplo $\bar{*}_1$. Es claro que $b \,\bar{*}_1 A = 0$ y que $b \,.\, A = b$, luego con se cumple la propiedad PD.

Es claro que el valor de la función penetración de dos contrarios tiene que ser un elemento central para que se cumpla con las propiedades C y PD. De acuerdo con esta condición, se pueden construir las expresiones de las cuatro funciones penetración.

En el Cuadro 14 se presenta la tabla de verdad de la penetración $\bar{*}_2$ donde se ha elegido la opción $x \,\bar{*}_2\, 1 = x$. Esta función tiene propiedades de interés relacionadas con las funciones devenir y con los cuantificadores. Tiene interés en las aplicaciones a las ciencias experimentales y las ciencias sociales, tal como se ve en los capítulos siguientes.

Las penetraciones estrictas no cumplen con el Teorema 44 puesto

Cuadro 13: Tabla de verdad de la penetración estricta 1 en **3D5**.

$\overline{*}_1^0$	0	a	b	c	d	e	p	q	r	s	t	A	B	C	D	E	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a					p					p					0
b	0		b					q					q				0
c	0			c					r					r			0
d	0				d					s					s		0
e	0					e					t					t	0
p	0	p					p					p					0
q	0		q					q					q				0
r	0			r					r					r			0
s	0				s					s					s		0
t	0					t					t					t	t0
A	0	p					p					A					0
B	0		q					q					B				0
C	0			r					r					C			0
D	0				s					s					D		0
E	0					t					t					E	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

que en el caso de $\overline{*}_i^d$ ocurre $a \,\overline{*}_i^d\, b = 0$ pero $N_0\, a \,\overline{*}_i^d\, N_0\, b = A \,\overline{*}_i^d\, B = 0 \neq N_0\, 0$. En el caso de $\overline{*}_i^0$ o $\overline{*}_i^1$ ocurre lo mismo.

El estudio de las funciones penetración estricta en reticulados de mayor rango no parece tener mayor interés, al menos en el estado actual de este estudio. No obstante esto, es posible indicar la manera de extender las funciones penetración mediante una construcción similar a la mostrada en la Figura 22.

La construcción de las funciones penetración estricta puede continuar en los reticulados de *rango impar*. Como ejemplo consideraremos la construcción en **5Dn**, ver Figura 23. En la figura se ha omitido el valor 1 que puede ocupar cualquiera de las relaciones de la Figura 20.

En el diagrama de la izquierda se presenta la notación matemática del reticulado. En el diagrama de la derecha está el semi–reticulado que construye una de las funciones penetración. Las otras funciones se construye del mismo modo, pero con los elementos d_{i+2}, e_{i+1}, E_{i-1}, D_{i-2}, etc.

Cuadro 14: Tabla de verdad de la penetración estricta 2 en **3D5**.

$\bar{*}_2^d$	0	a	b	c	d	e	p	q	r	s	t	A	B	C	D	E	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a					p									p	a
b	0		b					q				q					b
c	0			c					r				r				c
d	0				d					s				s			d
e	0					e					t				t		e
p	0	p					p									p	p
q	0		q					q				q					q
r	0			r					r				r				r
s	0				s					s				s			s
t	0					t					t				t		t
A	0		q					q				A					A
B	0			r					r				B				B
C	0				s					s				C			C
D	0					t					t				D		D
E	0	p					p									E	E
1	0	a	b	c	d	e	p	q	r	s	t	A	B	C	D	E	1

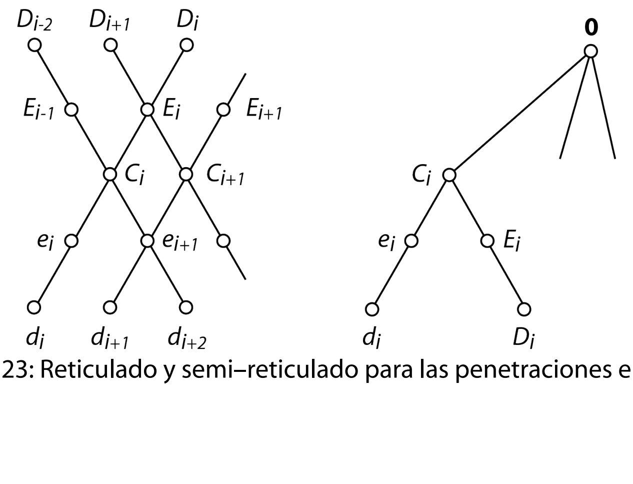


Figura 23: Reticulado y semi–reticulado para las penetraciones en **5Dn**.

Las penetraciones estrictas con rango 5 permiten estudiar con más detalle algunos problemas de las clases en las ciencias sociales. Por el momento no parecen existir ejemplos donde sea necesario un reticulado de rango 7.

El devenir

Introducción

La segunda función dialéctica que es necesario introducir describe la propiedad de *devenir*, de la transformación. Es una función de dos variables $f(x, y)$ que expresa que el valor dialéctico x deviene, se transforma, en el valor dialéctico y. Por esta razón la escribimos como $x \to y$.

La formación de la función devenir se basa en la identificación de las propiedades formales que se extraen de los ejemplos de devenir realizados por el pensamiento humano espontáneo. Son los ejemplos antes estudiados los que permiten realizar la formalización, provienen de la experiencia humana y de no la especulación *a priori*.

La primera de las propiedades del devenir consiste en declarar que la inmovilidad es imposible, tal como sostenía Erakleitos frente a Zenon. Esto se traduce en que la expresión $a \to a$ es absolutamente falsa.

Los diferentes ejemplos presentados, provenientes del pensamiento espontáneo a lo largo de los siglos, muestran que hay una estrecha vinculación entre la función devenir y la negación. En la mayoría de los ejemplos analizado se presenta de la forma:

$$\cdots a \to N\,a \to N\,N\,a \to N\,N\,N\,a \to \cdots$$

donde a es un valor dialéctico y N es una negación particular. Casi siempre éste es un proceso cerrado en un ciclo en el cual se regresa al punto de partida.

Como es natural, hay una propiedad semántica que recorre toda la estructura de la dialéctica, la invariancia en las rotaciones del reticulado, IR. Es natural pensar que la función lógica devenir cumpla con esta propiedad que es consecuencia de que la rotación y las negaciones comunes conmutan.

Un caso particular de devenir ocurre con los valores binarios 0 y 1. Por la interpretación de la lógica tradicional parece evidente que $0 \rightarrow 0$ y $1 \rightarrow 1$ son *absolutamente verdaderos*. Las afirmaciones de la lógica o la matemática son consideradas *inmutables*. En consecuencia $0 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 0$ son *absolutamente falsos*. Por extensión, un valor dialéctico no puede devenir en 0 o 1 y recíprocamente. Estas propiedades se pueden precisar mediante una definición formal.

Definición 28 *La función devenir, $x \rightarrow y$, es una función de dos variables en un reticulado dialéctico que cumple con las siguientes propiedades:*

1. Devenir del movimiento *(DM): Si d es un valor dialéctico, entonces $d \rightarrow d = 0$.*
2. Devenir de la negación *(DN). Si d es un valor dialéctico y N es una negación cualquiera, entonces $d \rightarrow N\,d$ es una tesis.*
3. Devenir de la rotación *(DR). Si $a \rightarrow b$ es una tesis, entonces $R\,a \rightarrow R\,b$, donde R es una rotación del reticulado, también es una tesis.*
4. Permanencia de los valores formales *(PP): Los valores verdadero y falso son inmutables, o sea, $0 \rightarrow 0 = 1$ y $1 \rightarrow 1 = 1$. Como complemento, si d es un valor dialéctico, entonces $d \rightarrow 0 = 0$, $d \rightarrow 1 = 0$, $0 \rightarrow d = 0$ y $1 \rightarrow d = 0$.*

En la Figura 15 se presenta la estructura general de una función devenir, donde $f(x, y)$ cumple con las propiedades DM, DN, y DR. Esta función dialéctica es la extensión natural de la función *equivalencia* de la lógica binaria, basta observar las relaciones entre 0 y 1.

A diferencia de otras funciones dialécticas donde lo que importa es el resultado de la operación, en la función devenir el resultado *suele ser poco importante*, lo verdaderamente importante son las cadenas que se forman de valor tesis y que describen el proceso del devenir. Para continuar con el análisis del devenir es necesario definir qué se entiende

Cuadro 15: Estructura del devenir dialéctico genérico.

$\to$	0	dialécticos	1
0	1	0 $\cdots$ 0	0
dialécticos	0	$f(x,y)$	0
1	0	0 $\cdots$ 0	1

por una cadena de relaciones en devenir.

Definición 29 *Por la cadena $a \to b \to c \to \cdots \to g \to h$ entendemos el conjunto de expresiones en devenir, encadenadas en secuencia entre sí, que* son tesis*: $a \to b$, $b \to c$, $\ldots$, $g \to h$.*

Una propiedad general de la función devenir es que toda cadena en devenir regresa al valor de partida.

Teorema 49 *Consideremos la cadena $a \to N\,a \to N\,N\,a \cdots$ donde a es un valor dialéctico y N es una negación* cualquiera*. La cadena regresa sobre sí misma: es un* ciclo cerrado.

Demostración. Existe un valor de p tal que $N^p = I$, es la identidad, luego regresa a a. □

Como es natural, existen negaciones involutorias, luego hay cadenas de solamente dos elementos, tal como los muestran diversos ejemplos. También es posible observar que la función devenir *no puede ser transitiva*, porque si ocurriera que de $a \to b \to c$ se obtuviera que $a \to c$ es una tesis, entonces, cada cadena cerrada demostraría que $a \to a$ es una tesis, en contra de una propiedad DM de las funciones devenir.

Existe una manera general de construir una función devenir, tal como establece el siguiente teorema.

Teorema 50 *La función definida, en un reticulado dialéctico de rango $r > 1$ y una negación* ordinaria N, *en la que no existe x tal que $Nx = x$ (negación no idempotente), es una función* devenir *si cumple las condiciones: 1) para cada valor dialéctico d y la negación N, $d \to N\,d$ es una tesis, 2) para los restantes pares de valores dialécticos vale 0 y 3) cumple PP.*

Demostración. En $r > 1$ y N, por 1), no existe a tal que $N\,a = a$, luego se cumple DM. La propiedad DN se cumple por 2). Si $d \to N\,d = e$ es una tesis, ocurre que $R\,d \to R\,N\,d = R\,d \to N\,R\,d$ es una tesis por la propiedad conmutativa de las negaciones ordinarias y 1), luego se cumple DR. PP se cumple por 3), luego está demostrado. En la demostración no interviene el valor dialéctico e.[130] □

Este resultado muestra que hay varias funciones devenir si se tiene en cuenta solamente a las cadenas y no los valores que toma la función devenir. Vale la pena notar que si $a \to b$ porque $b = N\,a$, también ocurre $b \to a$ porque $a = N^{-1}b$ pero se trata de dos *funciones diferentes de devenir*, a menos que ocurra $N = N^{-1}$ o sea, una negación involutoria.

Es importante observar que para la negaciones exóticas se cumple la igualdad $R\,\tilde{N}_j = \tilde{N}_j\,R_{-1}$ y no se cumple la propiedad DR.

El devenir en **Dn**

De acuerdo con el teorema de las negaciones en los reticulados **Dn**, se pueden construir diversas funciones devenir mediante las negaciones $N_1, N_2, \ldots$ así como por la elección de los valores que toma la función. En el Cuadro 16 se presentan las tablas de verdad de dos funciones devenir, la primera construida a partir de N_1 y la segunda, a partir de N_2.[131] Se omiten los 0 en la zona dialéctica.

En la primera función ocurre el ciclo cerrado $a \to b \to c \to d \to a$

[130] Una ecuación genérica de definición de una función devenir es, por ejemplo, la expresión $d \to N_i\,d = R_j\,d$ para los valores convenientes de i, j.

[131] Las ecuaciones empleadas en las funciones del Cuadro 16 son, respectivamente: $d \to N_1\,d = R\,d$ y $d \to N_2\,d = d$. Hay otros ejemplos posibles –donde se cambian los valores de la zona dialéctica– que cumplen las propiedades generales del devenir.

Cuadro 16: Algunas tablas de verdad del devenir en **D4**.

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	0	0	0	0	0
a	0		b			0
b	0			c		0
c	0				d	0
d	0	a				0
1	0	0	0	0	0	1

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	0	0	0	0	0
a	0			a		0
b	0				b	0
c	0	c				0
d	0		d			0
1	0	0	0	0	0	1

y en la segunda función ocurren los ciclos $a \to c \to a$ y $b \to d \to b$. Esto depende de las negaciones empleadas en el reticulado. En general, si n no es primo existen ciclos que poseen un número de elementos divisores de n, como es 2 divisor de 4, en este caso. En **D6**, por ejemplo, hay ciclos de 2, 3 y 6 elementos.

Los elementos de la secuencia del devenir son contrarios diacrónicos y, en cierta medida, equivalentes entre sí en un sentido amplio. Esto se analiza más adelante y se consideran ejemplos.

El devenir en **2Dn**

El teorema general permite construir funciones devenir en **2Dn**. A los efectos de ilustrar el método se elige el caso **2D4** con la notación de la Figura 13. En el Cuadro 17 se presenta la tabla de verdad construida con la ecuación $d \to D = R\,d$. Se omiten los 0 en la zona dialéctica.

Cuadro 17: Tabla de verdad de un función devenir en **2D4**.

$\to$	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0		b			b				0
b	0			c			c			0
c	0				d			d		0
d	0	a							a	0
A	0		B				B			0
B	0			C				C		0
C	0				D				D	0
D	0	A				A				0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Como puede construirse, se genera el ciclo $a \to A \to b \to B \to c \to C \to d \to D \to a$, pero también los ciclos $a \to b \to c \to d \to a$ y $A \to B \to C \to D \to A$.

El devenir en **3Dn**

Los reticulados de rango 3 tienen, como todos los rangos impares, *elementos centrales*. Este hecho hace que la función devenir posea propiedades especiales. Por otra parte, estos reticulados son muy importantes para la aplicación a la dialéctica de la historia.

El teorema general permite construir funciones devenir en **3Dn**. A los efectos de ilustrar el método se elige el caso **3D5** con la notación de la Figura 14. Se toma como función de definición $x \to N_0\, x = x$. No vale la pena escribir la tabla de verdad que está casi completamente formada por 0. Por esta razón es preferible escribir solamente los valores dialécticos significativos.

Cuadro 18: Una función devenir en **3D5**.

$a \to A = a$	$p \to q = p$	$A \to c = A$
$b \to B = b$	$q \to r = q$	$B \to d = B$
$c \to C = c$	$r \to s = r$	$C \to e = C$
$d \to D = d$	$s \to t = s$	$D \to a = D$
$e \to E = c$	$t \to p = t$	$E \to b = E$

Esta función devenir genera dos ciclos causales, el primero entre átomos y máximos

$$a \to A \to c \to C \to e \to E \to b \to B \to d \to D \to a$$

el segundo entre los elementos centrales

$$p \to q \to r \to s \to t \to p.$$

El círculos causal de máximos y átomos es diferente de todos los encontrados en **2D5** a pesar de tener los mismos elementos.

El río de Erakleitos

En los reticulados **rD**∞ la función devenir no arma un ciclo causal cerrado. Por el contrario, las sucesivas negaciones conducen siempre a valores dialécticos nuevos. Éste es el modelo lógico del río de Erakleitos, ver página 59.

También este modelo se aplica a la selección natural. El proceso del devenir de las especies no regresa nunca a un punto previo, al menos en el estado de nuestro conocimiento de la naturaleza. Por extensión también parece ser éste el modelo lógico del proceso de la historia humana, al menos en la interpretación materialista, no en la de Vico.

Contrarios sincrónicos y diacrónicos

Las funciones penetración y devenir se relacionan estrechamente con los contrarios sincrónicos y diacrónicos descritos en los capítulos iniciales. Mediante estas funciones se puede formalizar su definición y propiedades.[132]

> **Definición 30** *Dos elementos x, y distintos en un reticulado dialéctico **L** se llaman* contrarios sincrónicos *si $x \bar{*} y$ es una tesis para una función penetración estricta del reticulado. Dos elementos se llaman* contrarios diacrónicos *si $x \to y$ es una tesis para una función devenir del reticulado.*

Esta situación se puede ejemplificar en **3Dn** donde se pueden encontrar y relacionar los dos tipos de contrarios en un mismo reticulado. En la Figura 24 se presenta el reticulado con la notación matemática.

Con estas definiciones se puede demostrar un resultado de importancia para la aplicación de la dialéctica a diversos casos de interés. Consideremos la penetración $\bar{*}_1$ que es conmutativa.

> **Teorema 51** *En todo reticulado **3Dn** se cumplen las ecuaciones: $d_i \bar{*}_1 D_i \to C_{i+1}$, $C_i \to d_{i+1} \bar{*}_1 D_{i+1}$ y $d_i \bar{*}_1 D_i \to d_{i+1} \bar{*}_1 D_{i+1}$ para todos los valores de i.*

[132] Notar que si $x \bar{*} y$ es una tesis, los elementos x e y, distintos, son contrarios porque existe una negación que los vincula, ver las tablas de verdad. En el caso $x \to y$ son contrarios por la definición de $\to$.

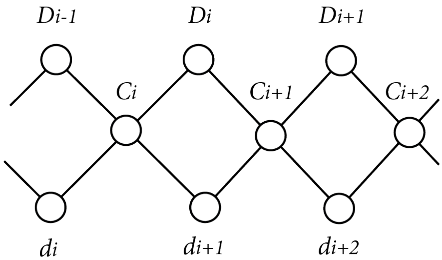


Figura 24: El reticulado **3Dn** en notación matemática.

Demostración. Es inmediato que ocurre, ver Cuadro 12

$$d_i \,\bar{*}_1 N_0\, d_i = C_i \qquad d_{i+1} \,\bar{*}_1 N_0\, d_{i+1} = C_{i+1} \quad \cdots$$

Luego todos estos pares de elementos

$$d_i, N_0\, d_i = D_i \qquad d_{i+1}, N_0\, d_{i+1} = D_{i+1} \quad \cdots$$

son contrarios sincrónicos. Por otra parte ocurre

$$C_{i+1} = N_0\, C_i \quad C_{i+2} = N_0\, q \quad \cdots$$

lo cual indica que se puede escribir

$$C_i \to C_{i+1} \qquad C_{i+1} \to C_{i+2} \qquad \cdots$$

y por lo tanto éstos son contrarios diacrónicos. En consecuencia ocurre, reemplazando elementos en los resultados obtenidos, se obtienen las ecuaciones que se debían demostrar. □

Este teorema se cumple en forma similar para la penetración 2.

Teorema 52 *En todo reticulado **3Dn** se cumplen las ecuaciones:* $d_i \,\bar{*}_2 D_{i-1} \to C_i$, $C_{i+1} \to d_{i+1} \,\bar{*}_2 D_i = C_i$, $d_i \,\bar{*}_2 D_{i-1} \to d_{i+1} \,\bar{*}_2 D_i$ *para todos los valores de* i.

Demostración. La demostración es similar que en el caso anterior, ver Cuadro 12

$$d_i \,\bar{*}_1 N_{n-1}\, d_i = C_i \qquad d_{i+1} \,\bar{*}_1 N_{n-1}\, d_{i+1} = C_{i+1} \quad \cdots$$

Luego todos estos pares de elementos

$$d_i, N_{n-1}\, d_i = D_{i-1} \quad d_{i+1}, N_{n-1}\, d_{i+1} = D_i \quad \cdots$$

son contrarios sincrónicos. Por otra parte ocurre

$$C_{i+1} = N_0\, C_i \quad C_{i+2} = N_0\, q \quad \cdots$$

lo cual indica que se puede escribir

$$C_i \to C_{i+1} \qquad C_{i+1} \to C_{i+2} \quad \cdots$$

y por lo tanto éstos son contrarios diacrónicos. En consecuencia ocurre, reemplazando elementos en los resultados obtenidos, se obtienen las ecuaciones que se debían demostrar. □

Si bien este teorema parece similar al anterior, posee una diferencia sustancial. En el primer caso, los contrarios sincrónicos y diacrónicos ocurren a través de la negación N_0. En el segundo caso, los contrarios sincrónicos son mediante la negación N_{n-1} y los diacrónicos mediante la negación N_0. El hecho que en el primer teorema intervenga una única negación en tanto que en el segundo intervienen dos negaciones *es esencial* para su aplicación en las ciencias sociales.

Es fácil extender estos resultados a reticulados más complejos con r impar. Estas ecuaciones tienen una aplicación importante en las ciencias sociales, tal como se analiza en el capítulo final de este libro.

La argumentación

Introducción

La palabra dialéctica viene del griego, de διαλεκτικος (dialektikos) y quiere decir “relativo a la discusión”. Desde allí la palabra pasó al latín, *dialectice*, y le agregó también la idea de diferenciar lo verdadero de lo falso. Del latín la palabra pasó a las lenguas modernas europeas. En los últimos siglos se agregó el significado de análisis de los contrarios. En este capítulo se analiza esta idea de discusión y resolución de las contradicciones. Se espera que una formalización de la dialéctica permita, al menos, “razonar”, cualquiera sea el significado que se adjudique a esta palabra.

El modelo deductivo introducido por Euklides, formalizado por George Boole, Gottlob Frege (1848, 1925) y Bertrand Russell, sin duda ha sido muy exitoso. Sin embargo no logra cubrir todos los aspectos del “razonamiento natural” que realizan los seres humanos.

Los empiristas ingleses introdujeron, por ejemplo, la *inducción* como un mecanismo adicional de creación de conocimiento. La propuesta de esta metodología, asociada a las ciencias naturales, despertó desde el principio sospechas desde el punto de vista formal. ¿Cuál era el esquema formal de esta manera de crear conocimiento? Durante un par de siglos el tema quedó en una nebulosa hasta que finalmente, en el siglo 20, Karl Popper (1902, 1994) hizo un gran avance en este tema.

La propuesta de Popper se basaba en la matemática: las afirmaciones –especialmente las derivadas de la experiencia– no se demuestran, *se refutan*. Al invertir los términos, el problema parecía quedar resuelto. El modelo que seguía Popper es empleado por la matemática desde siempre. La existencia de un *contraejemplo* es prueba suficiente para la falsedad de un enunciado. Basta con hallar un caso donde no se cumple un enunciado, para refutarlo, desecharlo, probar que es falso.

Para Popper –y para todos los científicos– un enunciado tiene que poder ser refutado de alguna manera. Tal vez no en este momento, por razones tecnológicas o económicas, pero sí posee esta posibilidad. Si no es posible de refutar, es un enunciado filosófico, teológico o una creencia.

Esto está muy bien en la matemática y en lógica binaria. Una afirmación solamente puede ser verdadera o falsa, pero no es así en la dialéctica en la cual existen valores intermedio de verdad. Luego debemos replantearnos el problema exactamente donde lo dejó Popper.

La argumentación

La teoría de la refutación ha desempeñado un papel muy importante en el esclarecimiento del fundamento de la ciencia. Sin embargo presenta un aspecto muy parcial acerca del desarrollo de las afirmaciones científicas.

La ciencia no es algo acabado y perfecto. No es un conjunto de enunciados precisos sometido a la espera de una posible refutación. La mayoría de los resultados de la ciencia se encuentra en elaboración y solamente unos pocos enunciados están en las condiciones ideales de Popper. ¿Cómo proceden entonces los científicos al trabajar con enunciados imprecisos? Al establecerse una tesis nueva, se buscan enunciados refutables que no sean refutados por todo lo conocido hasta el momento. Con esta propiedad popperiana no alcanza, las nuevas teorías deben ser útiles y la viejas teorías refutadas también pueden ser útiles. Analicemos algunos ejemplos tal como se presenta en el Cuadro 19.

Cuadro 19: Ejemplos de teorías.

	útil	**inútil**
refutada	Mecánica de Newton	Mecánica de Aristoteles
no refutada	Mecánica Cuántica Mecánica Relativista	dinosaurios inexistentes universo sin expansión

Es claro que la mecánica de Newton refutó y volvió inútil a la mecánica de Aristoteles, ver [7]. Las mecánicas relativistas y cuánticas refutaron a la mecánica de Newton pero no la convirtieron en inútil, coexistieron en diferentes campos de aplicación. En este cuadro se consideran enunciados posibles acerca de la existencia de los dinosaurios y del universo en expansión.

- Los dinosaurios nunca existieron como seres vivos. Lo que existen son huesos fósiles que se formaron como un fenómeno geológico de la corteza de la Tierra.[133]
- El universo no está en expansión. El corrimiento hacia el rojo que observan los astrónomos *es una propiedad de los telescopios*. Cuando la luz de una galaxia lejana atraviesa un telescopio sufre este corrimiento. No ocurre así con las luces provenientes de orígenes más cercanos a un año–luz.

Estos enunciados son difícilmente refutables, pero no imposibles de refutar.[134] Sin embargo ningún científico se molestaría en refutarlos.

¿Por qué rechazamos estos enunciados? Procedemos así porque además de la posibilidad de ser refutados, los enunciados científicos deben poseer una *argumentación* que los justifique. Un científico pedirá *una razón* por la cual la luz de un origen distante se comportaría diferente al atravesar un telescopio, exigirá una definición precisa del telescopio utilizado y las razones por las cuales las leyes de la óptica se modifican. En resumen, en la ciencia no basta con proponer algo y esperar de su refutación como imagina Popper, además es necesario *argumentar* la validez del enunciado. El aspecto de un enunciado científico tiene la estructura:

$$A \text{ es válido por la razón } R_1, \text{ por } R_2, \text{ por } R_3, \ldots$$

Cuanto mayor sea la lista de argumentos, mejor será la calidad científica del enunciado y su verosimilitud. En esta expresión, la coma reemplaza una conectiva nueva, asociativa y conmutativa –puesto que el orden o la agrupación de los argumentos no cambia el resultado– que se explora

[133] Este enunciado, en lo esencial, fue formulado por un fundamentalista judío en su pretensión de negar la edad de la Tierra. Agregaba que si nadie vio un dinosaurio, no se puede asegurar que existieran. Este argumento tiene el inconveniente que se aplica también a los los átomos, los quarks, las tormentas de Júpiter y muchos otros casos más que la ciencia estudia habitualmente.

[134] Michael Crichton (1942, 2008) en su novela *Jurassic Park* (1990) propone una refutación del primer enunciado mediante la "fabricación" de un dinosaurio por reconstrucción de su ADN a través de fósiles conservados en resina. El segundo enunciado es potencialmente refutable mediante una sonda artificial y la medida experimental.

en este capítulo. Si empleamos el símbolo $\oplus$ para explicitar esta nueva conectiva se tiene la expresión:

$$A = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus \cdots$$

En la medida que los argumentos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sean "independientes" y "complementarios", más verosímil será el enunciado. Veamos algunos ejemplos clásicos:

- Cuando Newton formuló la teoría de la gravitación universal argumentó con pocas razones: la caída de los cuerpos en la Tierra, el movimiento de la Luna, el sistema planetario y los cometas. Todos estos argumentos, que son independientes entre sí, fundamentaban la idea de la gravitación universal.
- Cuando Darwin formuló la selección natural argumentó con casos independientes: la selección de animales y vegetales por cultivo humano, la flora y la fauna de las Galápagos y muchos otros casos específicos.
- Cuando Einstein formuló la Relatividad General, solamente contaba con una comprobación experimental: el corrimiento del perihelio de Mercurio. Luego de la observación del eclipse de 1919 se agregó la desviación de la luz al pasar cerca de la masa del Sol. Con el pasaje de los años se agregaron otros fenómenos y se continuará agregando nuevos fenómenos hasta llegar al punto de la (eventual) refutación de la teoría.

Esta manera de trabajar es tema de todos los días en la ciencia, sin embargo tiene grandes dificultades en la lógica binaria. Este método *no puede ser formalizado en la lógica binaria*. En efecto, no existe ninguna conectiva lógica que permita vincular una cadena de enunciados de modo que se *refuerce* su verdad. Peor aún, para la lógica binaria un enunciado solamente puede ser verdadero o falso, jamás puede ser más o menos verosímil.

A poco que se medite, resulta claro que el proceso de refutación de una afirmación *también es un proceso argumentativo*. La manera de refutar consiste en acumular argumentos contrarios, exactamente igual que para defender una tesis. Éste es un proceso que solamente se puede comprender y formalizar en una lógica dialéctica. En las ciencias naturales, por ejemplo, no se sigue el modelo formal de la matemática porque la situación es diferente.[135] La verdad o la refutación son un proceso de acumulación de argumentos y no la búsqueda de un contraejemplo formal. Nos encontramos en este punto en un lugar en el cual la lógica dialéctica, de múltiples valores lógicos, permite aclarar la situación.

Para Popper este problema no existe porque su idea de argumentación tiene lugar en la lógica binaria. Refutar es, como en la matemática, encontrar un *contraejemplo*. La argumentación no existe, sólo existe la refutación porque su lógica solamente admite verdadero o falso.

Las argumentación en un tribunal de justicia

El ejemplo más claro de la argumentación ocurre en un tribunal de justicia. Allí se enfrenta un acusador y un defensor quines deben defender posiciones contrarias. Para esto cuentan con una cantidad de argumentos que se consideran válidos, las "pruebas" que aporta cada parte en litigio. Ocasionalmente pueden emplear algunos argumentos comunes con una interpretación diferente. Se desarrolla la argumentación y luego un jurado o un juez *decide quién tiene más razón*, porque uno de los conjuntos de argumentos logra convencer como "verdadero" por acumulación en "cantidad", y así se resuelve el litigio.

La formulación de una tesis y su refutación es un mecanismo lógico idéntico al desarrollo de un *proceso judicial*. A pesar que esta actividad ocurre permanentemente en la vida cotidiana, la lógica binaria no es capaz de construir un modelo sobre lo que acontece en el tribunal. Es cierto que se emplean las palabras "verdadero" y "falso" pero nunca poseen el significado que les da la lógica binaria. Se trata algo que solamente se puede formalizar en la dialéctica.

En un tribunal se presentan una lista de hechos $H_1, H_2, H_3, \ldots$

[135] Imre Lakatos (1922, 1974) y otros autores defienden el carácter argumentativo de Popper en la matemática, con una variante. La argumentación consiste en el enfrentamiento de teorías rivales y esto se aplica también a la matemática. Su tesis es defendida con una excelente colección de ejemplos históricos.

que se consideran verdaderos. Son verdaderos en un sentido vulgar o cotidiano, no en el sentido matemático o absoluto. Son lo que en este estudio hemos llamado *tesis*, algo intermedio entre "verdadero" y "falso". En una situación ideal los diferentes argumentos deben ser simples e independientes entre sí. Por simples e independientes se entiende que no se pueden "descomponer" o "separar" en otros argumentos más simples. Esto es necesario para un correcto uso en la argumentación.

El conjunto de todos los hechos *es contradictorio entre sí*. Todos los H_i no pueden ser verdaderos a la vez porque si fuese así no habría motivo para la discusión o la argumentación. Cada parte en litigio clasifica los argumentos en tres conjuntos: los argumentos que considera "válidos" o "significativos", los argumentos que considera "neutros", "indiferentes" o "irrelevantes" y los argumentos que considera "no válidos", "insignificantes" o "accidentales". En definitiva, podemos clasificar a los H_i como $A_1, A_2, \cdots A_p$ a los hechos que esgrime la acusación, $D_1, D_2, \cdots D_r$ a los que esgrime la defensa y $I_1, I_2, \cdots I_s$ los hechos indiferentes.[136]

La argumentación consiste en mostrar que el conjunto de hechos que se considera "son más verdaderos" o "tienen mayor peso" que los de la parte contraria. Es aquí donde entra la *función argumentación*. En forma esquemática se tiene:

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots A_p \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots I_s$$

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots D_r \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots I_s$$

donde A es el "valor" o "peso" de la acusación y D, es el de la defensa. La tarea del jurado o del juez consiste en resolver la relación $A \lesseqgtr D$. El mayor valor de la función será quien tenga "razón". Eventualmente puede ocurrir que la cuestión no se pueda decidir.

Llegados a este punto, todo se reduce a definir la función argumentación.

[136] Aquí hay una simplificación porque los argumentos indiferentes pueden no ser los mismos para la dos partes en pugna.

Las función argumentación

La principal propiedad que posee la función argumentación es una forma de monotonía que permite obtener un "refuerzo" de la argumentación, un "mayor nivel de verdad". Si recurrimos a la interpretación de la dialéctica y pensamos en el caso de dos variables solamente, se trata de buscar una función $f(x,y)$ que posea la propiedad:

$$f(x,y) \geq x \qquad f(x,y) \geq y.$$

De esta manera se "refuerza" la argumentación por el agregado de argumentos. De inmediato se obtiene que la función es conmutativa y asociativa, de otra manera no se podría formar una sucesión de argumentos sin que importe el orden en que se presentan. También es inmediato que $f(x,x) = x$ porque la reiteración del mismo argumento no agrega nada a su valor de verdad.[137]

La argumentación tiene un comportamiento particular con los valores "verdadero" y "falso". Es claro que la introducción de un argumento absolutamente verdadero no cambia nada al valor de la argumentación, luego se debe cumplir $x \oplus 1 = x$. Por el contrario, el agregado de un argumento falso invalida toda la argumentación, luego $x \oplus 0 = 0$. En definitiva, la argumentación se define como sigue.

Definición 31 *Se llama* función argumentación *entre dos elementos* x, y *de un reticulado dialéctico* **L** *a una función* $\oplus$ *que cumple con:*

1. *Idempotente (I), asociativa (A) y conmutativa (C).*
2. *Invariante en la rotación (IR):* $R(x \oplus y) = R\,x \oplus R\,y$.
3. $x \oplus y \geq x$ *y con* $x \oplus y \geq y$.
4. $x \oplus 1 = x$ *y con* $x \oplus 0 = 0$.

[137] En la vida cotidiana, por el contrario, la reiteración del mismo argumento puede crear un *falso* aumento de su valor lógico. Se atribuye a Joseph Goebbels (1897, 1945), el siniestro ministro de propaganda del Tercer Reich: *A lie told once remains a lie but a lie told a thousand times becomes the truth* (Una mentira dicha una vez es una mentira, dicha mil veces deviene verdad). La cita puede que sea falsa pero describe bien la idea.

Es inmediato, por el Teorema 42, que $\oplus$ es una operación suma en un semi–reticulado. La tabla de verdad de $\oplus$ se obtiene de una forma muy simple: intercambiando los valores 0 y 1 en el reticulado y construyendo la función **O** que resulta. En la Figura 25 se ilustra el procedimiento para el reticulado **2D4**, pero es general para reticulados de otros rangos y números. Esta función se construye de una manera *similar* a las funciones penetración, pero su diagrama difiere claramente de las Figuras 15 y 20.[138] De esta propiedad resulta la tabla de verdad presentada en el Cuadro 20.

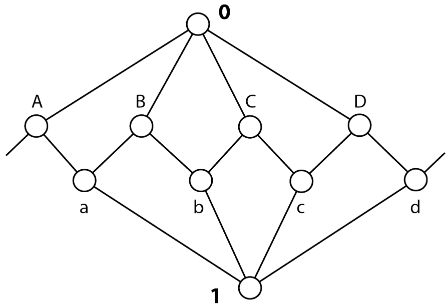


Figura 25: Semi–reticulado genérico para la función argumentativa.

Cuadro 20: Tabla de verdad de la función argumentativa.

$\oplus$	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	A	0	D	A	0	0	D	a
b	0	A	b	B	O	A	B	0	0	b
c	0	0	B	c	C	0	B	C	0	c
d	0	D	0	C	d	0	0	C	D	d
A	0	A	A	0	0	A	0	0	0	A
B	0	0	B	B	O	0	B	0	0	B
C	0	0	0	C	C	0	0	C	0	C
D	0	D	0	0	D	0	0	0	D	D
1	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1

[138] Como es obvio, en los reticulados de rango 1, $\oplus$ coincide con la función **Y** conocida. En el reticulado **3Dn**, por ejemplo, $a \oplus b = p$ pero $a * b = 0$.

Por ser una operación **O** en un reticulado con simetría de rotación, esta función es conmutativa, asociativa, idempotente e invariante en la rotación. Se llama *argumentativa* porque por la composición de valores dialécticos no se logra obtener una verdad absoluta, un valor 1. Esta función describe el proceso de argumentación en un juicio. Cada abogado intentará no caer en una contradicción –no acumular argumentos que conduzcan a un valor 0– que sería fatal para la parte que defiende. Por esta razón jamás un abogado intentará controvertir algo que ya ha sido demostrado como cierto.

En una controversia real, según sea la cantidad de argumentos independientes que existan, será el reticulado **rDn** en el cual se está trabajando. A medida que aumentan los argumentos, crece n y es de interés que también aumente r. Presumiblemente ganará el juicio quien logre un argumento combinado de mayor valor lógico que su oponente.

Este mecanismo se aplica por igual a la elección entre dos teorías científicas diferentes sobre los mismos fenómenos, algo que no difiere en nada a la argumentación en un tribunal de justicia.

La fundamentación de los principios en las ciencias

La refutación es claro que es un proceso de argumentación. No es la única aplicación. Hay otros aspectos del proceso de construcción de la ciencia que emplea también la argumentación: la construcción (o fundamentación) de los principios de las ciencias.

Consideremos algunos "principios" de las ciencias naturales:

- El principio de relatividad de Galilei.
- El principio de inercia de Galilei.
- La gravitación universal de Newton.
- El principio de conservación de la masa de Lavoisier.
- El principio de conservación de la energía de Mayer–Joule.
- La herencia y la mutación de los seres vivos de Darwin.
- La supervivencia de los seres vivos más aptos de Darwin.

Todos estos enunciados son el resultado de una argumentación sobre observaciones simples y aisladas. Son, en definitiva, una argumentación similar a la que ocurre en un tribunal de justicia. Vale la pena notar que se han elegido ejemplos de la física, la química y la biología a los efectos de mostrar la aplicación del método a todos estos casos.

Repasemos ahora lo procesos de argumentación que han realizado los diversos autores. El principio de relatividad de Galilei fue un enunciado teórico que resulta de la composición de los movimientos. A su vez, la composición de los movimientos permitía demostrar que los proyectiles seguía una trayectoria parabólica. Éstos eran los principales argumentos. De allí la refutación de la física de Aristoteles acerca de la caída de los cuerpos –una bola dejada caer desde el mástil de una nave en movimiento o una flecha lanzada hacia la popa– en una nave en movimiento. Pierre Gassendi (1592, 1655) realizó efectivamente la experiencia.[139] El principio de inercia fue un resultado experimental de Galilei como parte del análisis de la caída de los cuerpos: una bolita en un plano horizontal se movía con velocidad constante.

Como ya hemos demostrado, ver página 31, el argumento de Newton para la gravitación se basaba en cinco argumentos independientes[140]

$$GN = K1_{circular} \oplus K3_{S.Solar} \oplus K3_{Jupiter} \oplus K3_{Saturno} \oplus K3_{Tierra}$$

donde GN es la gravitación de Newton, $K1$ es la primera ley de Kepler –áreas iguales en tiempos iguales– y $K3$ es la tercera ley –los períodos son proporcionales a la potencia 3/2 del diámetro–. Los subíndices corresponden al movimiento circular uniforme, al sistema solar y a los satélites de Júpiter, Saturno y la Tierra.

Una vez establecida la ley de gravitación, Newton demostró que el movimiento puede ser elíptico, segunda ley de Kepler, ver [66, 67, III, *Theorema* xiii] o parabólico [67, III, *Theorema* xx] y analizó la trayectoria del cometa de 1680 descubierto por John Flamsteed, el primer astrónomo real. En [66, 67, III, *Theorema* xix] propone una teoría gravitatoria de las mareas.

[139] La dificultad para advertir la rotación de la Tierra mediante la caída de los cuerpos dependía de la ley de composición de los movimientos, no era una objeción a la existencia de la rotación.

[140] En la primera edición eran cuatro, faltaba $K3$ sobre los satélites de Saturno. Su fundamentación era una típica "inducción", reforzada por el nuevo argumento.

Estos resultados se pueden enunciar como:

$$GN \Rightarrow K2 \qquad GN \Rightarrow \text{cometa Flamsteed}$$

donde $\Rightarrow$ es la implicación lógica, $K2$ es la segunda ley de Kepler –el movimiento es elíptico y el Sol es uno de los focos– a la cual agrega un movimiento parabólico del cometa.

Tan importante como la "explicación" de las primeras tres leyes de Kepler, es el haber desechado e ignorado la cuarta ley –las órbitas de los seis planetas se corresponden con los cinco sólidos regulares: octaedro, icosaedro, dodecaedro, tetraedro, cubo–. ¿Por qué Newton ignoró $K4$? Por una simple razón, la teoría de la gravitación mostraba que la posición de los satélites de un cuerpo puede estar a cualquier distancia del centro de atracción.[141]

El principio de conservación de la masa en las reacciones químicas fue un resultado experimental obtenido por Antoine–Laurent de Lavoisier (1743, 1794), ver [54], mediante diversas experiencias en las cuales pesó las componentes y los compuestos obtenidos en diversos experimentos. Cada caso agregaba un argumento que se sumaba a la formulación del principio. El análisis de los gases, en particular del oxígeno, contribuyó a refutar la idea contraria –la teoría del *flogisto*– de la no conservación de la masa en la formación de los óxidos.

Julius von Mayer (1814, 1878) estableció, en 1842, que el oxígeno era una componente principal del metabolismo de los seres vivos y de allí la fuente de energía. James Joule (1818, 1889), en 1843, estableció la equivalencia entre el trabajo mecánico y el calor producido por la viscosidad del agua. Esta equivalencia también se demostraba por el calentamiento mediante una resistencia eléctrica, por la compresión de un gas o por el calentamiento al perforar el alma de un cañón. Estos experimentos independientes –y muchos otros posteriores realizados

[141] El problema de la geometría del sistema solar se remonta a Pithagoras que asociaba las órbitas a la escala musical. Kepler regresó sobre este tema y también a la música de los cielos. En 1766 Johann Bode (1747, 1826) –junto con su estudiante Titus– propuso una ecuación de distribución de los planetas $d = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^n$ donde d está medido en unidades astronómicas –la distancia media Tierra–Sol– y $n = -\infty, 0, 1, 2, \cdots$. Los asteroides la cumplen, pero Neptuno, no. La cuestión de la distribución planetaria sigue abierta y ampliada ahora con el descubrimiento de planetas extrasolares.

por otros científicos– argumentaron el principio de conservación de la energía.

La argumentación de Darwin está contenida en *The origin of Species* [15]. Es difícil encontrar un ejemplo más claro y completo de una argumentación en ciencias. Cada capítulo de la obra agrega argumentos que refuerzan sus enunciados básicos. En los capítulos I y II muestra la variación de las especies por domesticación y en forma natural. En el capítulo III –empleando el argumento de Malthus sobre el crecimiento libre de las poblaciones– demuestra que no todos los seres vivos que nacen, sobreviven. En el capitulo IV establece la selección natural de los sobrevivientes. En el capítulo V establece diferentes maneras de adaptación. En los capítulos X y XI analiza el problema desde el punto de vista geológico y muestra su verosimilitud. En los capítulos XII y XIII estudia la distribución geográfica de los seres vivos.

Esta obra de Darwin cumple completamente con la teoría de la argumentación. No solamente hay una lista extensa de argumentos simples e independientes entre sí, también hay argumentos contrarios. En los capítulos VI y VII tiene la valentía de analizar los defectos de su argumentación. El conjunto del libro, aplicando la función argumentación, termina por afirmar los principios. En el capítulo XV resume toda la argumentación.

La implicación

Introducción a la implicación dialéctica

El uso tradicional de la dialéctica no necesita de una función implicación. La implicación permite construir cadenas de razonamiento fijas e inmutables. Por el contrario, el pensamiento dialéctico se ocupa del movimiento, del cambio, no necesita de tal función. Sin embargo la lógica humana, considerada como un todo único debe contemplar ambos aspectos del pensamiento. Esta esta una primera razón para analizar la función implicación en un reticulado dialéctico.

Una segunda razón se vincula con los fundamentos de la implicación. En la lógica binaria todo es muy simple y las propiedades de la implicación se vinculan entre sí. Las funciones implicación en la dialéctica muestra un panorama muy diferente y muchos resultados que son aceptado como válidos y "demostrados" en la lógica binaria, tienen contraejemplos que refutan estas demostraciones.

La formalización de la lógica tenía por objetivo principal describir la forma del "razonamiento correcto". Desde Aristoteles hasta Boole, pasando por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646, 1716), el problema estuvo en discusión. Hacia fines del siglo 19 y comienzos del 20 la cuestión parecía haber sido completada. La formalización de Frege y Russell construían un edificio acabado y perfecto.[142]

La lógica binaria cumplió sobradamente con la meta de describir el "razonamiento lógico" al introducir la función binaria implicación $\Rightarrow$ con sus propiedades básicas. Esta función es una de las principales funciones lógicas binarias, comparable con **Y** y **O** y en buena medida equivalente a ellas, como es sencillo demostrar.

[142] No obstante esta alegada perfección había científicos que desconfiaban de los resultados. Henri Poincaré dudaba de lo correcto y definitivo de la lógica binaria. Es posible que intuyera que el pensamiento humano tenía más estructura que lo que lógica binaria podía describir.

La lógica dialéctica es una extensión de la lógica binaria de modo de incluir otras formas de pensamiento que escapan al modelo binario. Puesto que la implicación se ocupa de construir teorías formales, no ocupa un lugar importante en la dialéctica. No obstante eso, como la dialéctica debe contener como caso particular a la lógica binaria, es necesario extender la definición de la implicación. Sin embargo, no se espera que agregue nuevas formas de construcción del conocimiento deductivo.

La etapa final de consolidación del conocimiento científico es la formulación de una teoría deductiva. En la construcción de la teoría intervienen axiomas o principios o hipótesis que sirven como proposiciones aceptadas con un determinado nivel lógico. A partir de estas proposiciones básicas aceptadas, se construyen nuevos enunciados mediante la aplicación de un conjunto reducido de estructuras formales que son aceptadas como válidas.

En la lógica dialéctica el problema de extender la definición de la implicación es bastante complejo. Comprende dos grupos de reglas:

- Las *reglas formales* para construir nuevos enunciados a partir de los enunciados aceptados como válidos.
- Las *reglas semánticas* que permiten la aplicación de la dialéctica a los casos de interés de la ciencia o la historia.

Lo que importa, en última instancia, es definir las reglas de razonamiento que se emplean en la matemática y en las ciencias. No sirve para nada crear funciones a priori como ha hecho la lógica binaria. Un camino diferente ha planteado Frederic Fitch (1908, 1987), ver [25, 89]. En lo esencial define un conjunto de reglas que permiten construir un razonamiento válido. En todo lo que sigue sobre la función implicación emplearemos esta formalización, con algunas adaptaciones necesarias.

Las reglas formales de la implicación dialéctica

En esta sección nos ocupamos de estas estructuras formales y de su extensión a la lógica dialéctica. Si eliminamos repeticiones obvias,[143]

[143] La equivalencia *–co–implicación* en Fitch– de proposiciones es algo redundante que agrega nada. Por esta razón se la omite de las reglas formales.

estas estructuras son las que siguen. Cada regla posee siglas mnemotécnicas para simplificar su mención a lo largo de la exposición.

1. La introducción de la conjunción (IC): si a y b son tesis, $a \,.\, b$ también lo es.[144]

2. La introducción de la disyunción (ID): $a \Rightarrow a + b$ es una tesis cualquiera sea b.

3. La eliminación de la conjunción (EC): si $a \,.\, b$ es una tesis, también los son a y b.

4. La eliminación de la disyunción (ED): si $a + b$ es una tesis y se cumple que $a \Rightarrow c$ y $b \Rightarrow c$, entonces c es una tesis. Esta regla permite separar una demostración en dos (o más) casos más simples.

5. El principio de la doble negación (PNN): si a es una tesis, $NN\,a$ también lo es y recíprocamente.[145]

6. La propiedad transitiva de la implicación (T): si $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow c$ son tesis entonces $a \Rightarrow c$ también lo es. Esta regla permite formar cadenas de demostración.

7. El *Modus Ponens* (MP): si $a \Rightarrow b$ y a son tesis, entonces b también es una tesis.[146] Esta regla permite cortar las cadenas de demostración.

[144] Esta regla es aceptada en forma acrítica pero sin embargo hay razones para pensar que no es válida en general. La mecánica cuántica lo ha mostrado reiteradamente. Consideremos estas dos afirmaciones: a) *la posición de una partícula en un instante se puede medir con precisión* y b) *la velocidad de una partícula en un instante se puede medir con precisión*. Ambas afirmaciones son verdaderas, sin embargo $a \,.\, b$ es falsa y esto se llama *principio de incertidumbre* de Heisenberg. La mecánica cuántica ha puesto en jaque a la lógica como ya hemos ejemplificado antes. Esta observación tiene consecuencias muy importantes sobre la implicación dialéctica.

[145] En algunas lenguas naturales –el español es un ejemplo– la doble negación puede poseer un *carácter enfático* y no de afirmación.

[146] Se puede enunciar el *Modus Ponens* de una manera menos agresiva para la lógica binaria, pero equivalente. Si las dos primeras proposiciones no son falsas, la tercera tampoco lo es.

8. El *Modus Tollens*, en su variante simple, (MT): si $a \Rightarrow b$ es una tesis, entones si b es 0, a es 0. Esta regla implica que es posible que $0 \Rightarrow 0$ sea una tesis. El *Modus Tollens* extendido (MTE) es una condición más estricta, si $a \Rightarrow b$ es una tesis, entonces $N\,b \Rightarrow N\,a$ también es una tesis.

9. El principio de contradicción (PC) y el principio de contradicción extendido (PCE): si $a \Rightarrow N\,a$ es una tesis, entonces $N\,a$ también lo es (PC). El principio extendido establece que si $a \Rightarrow b$ y $a \Rightarrow N\,b$ son tesis, entonces $N\,a$ también lo es. PCE es una consecuencia de PC y las reglas anteriores.[147] PC es un caso particular de PCE.

Antes de continuar con este tema es necesario aclarar un punto esencial sobre IC. Consideremos dos átomos a, b del reticulado. Es claro que ambos son *tesis*, sin embargo ocurre $a\,.\,b = 0$, luego no se cumple IC. Este resultado no solamente es general para todos los reticulados dialécticos sino que IC tampoco se cumple para muchos otros elementos del reticulado, por ejemplo a y $N\,a$ son tesis, pero $a\,.\,N\,a = 0$ si N es estricta. Desde ya sabemos que la regla IC no es válida en general. Por esta razón en la exposición que sigue la expresión "cumple con las reglas formales" quiere decir "cumple con las reglas formales, excepto IC". Cuanto el punto sea importante se lo indicará expresamente. Este tema se considera en detalle en lo que sigue y es un punto esencial en la teoría de la implicación dialéctica.

Las reglas semánticas de la implicación dialéctica

Las reglas semánticas son condiciones adicionales que se exige a una función implicación para que arroje resultados coherentes con el uso real y espontáneo de la dialéctica.

1. El principio de permanencia (PP): se deben respetar los valores de la lógica binaria, luego $0 \Rightarrow 0 = 1$, $0 \Rightarrow 1 = 1$, $1 \Rightarrow 0 = 0$, $1 \Rightarrow 1 = 1$.

[147] La demostración es así. Tomemos como hipótesis: 1. a; 2. $a \Rightarrow b$ y 3. $a \Rightarrow Nb$ luego sigue: 4. b por MP en 1 y 2; 5. $NNb \Rightarrow Na$ por MTE en 3; 6. $b \Rightarrow Na$ por PNN en 5.; Na por MP en 4 y 6. Luego Na es una tesis.

2. La invariancia en la rotación (IR): la función implicación debe ser invariante en la rotación del reticulado **rDn** donde se define, esto es $R(x \Rightarrow y) = Rx \Rightarrow Ry$. Como consecuencia, si $x \Rightarrow y$ es tesis, $Rx \Rightarrow Ry$ también lo es.

3. Idempotencia (I): Para todo valor dialéctico d se cumple que $d \Rightarrow d = d$.

4. Principio de mezcla (PM—textbf): En algunas aplicaciones es deseable que los valores dialécticos no "se mezclen" al emplear la función implicación en forma reiterada. En forma precisa, existe un subconjunto S no trivial de elementos del reticulado considerado tales que si $x, y \in S$ entonces $x \Rightarrow y \in S$.[148]

La regla PM es de aplicación especial para el análisis de las ciencias naturales, tal como se analiza más adelante. Cuando se dice "cumple con las reglas semánticas" quiere decir "cumple con las reglas semánticas, excepto PM". La importancia de estas reglas adicionales –que no son necesarias en la lógica binaria– resultará clara de la exposición que sigue en este capítulo y los siguientes.

No contradicción e independencia de las reglas

La no contradicción de las reglas formales resulta inmediata desde que la lógica binaria las cumple, luego el conjunto de reglas no es contradictorio. La no contradicción de las reglas semánticas, entre sí y con las reglas formales, resulta de la existencia de funciones implicación que las cumplen. Así por ejemplo, en el reticulado **D3** este conjunto de reglas permiten encontrar 16 funciones de dos variables que las cumplen, excepto naturalmente IC y eventualmente PM.[149]

[148] En todo reticulado, $S = (0, 1)$ es un ejemplo válido, es la lógica binaria. En **Dn** $S = (0, a, 1)$ o en **2Dn**, $S = (0, a, b, A, 1)$ también son ejemplos válidos.

[149] Este número fue determinado por una programa que exploraba sistemáticamente todos los casos posibles. En el reticulado **D3** una tabla de verdad de dos variables posee 5×5=25 valores a determinar. Cada uno de ellos puede tomar 5 valores, luego hay $5^{25} \approx 2{,}98 \times 10^{17}$ funciones posibles de dos variables. Las funciones implicación definidas por las reglas son, naturalmente, muchas menos.

La independencia de las reglas –algo que no posee demasiado interés práctico– exige buscar contraejempos de estructuras que cumplan todas las reglas excepto la (o las) que se desea investigar.[150] Existen varios casos posibles para las reglas de uno u otro tipo:

- La regla se cumple en todos los reticulados dialécticos. Ejemplo: PNN y EC se cumplen en todo reticulado dialéctico.[151]
- La regla no se cumple en ningún reticulado dialéctico. Es el caso de IC ya mencionado.
- La regla se puede derivarse de otras reglas, no es independiente.
- La regla es independiente de un cierto conjunto de otras reglas.
- No tiene sentido considerar esta regla. Es el caso de PP que establece la coherencia con la lógica binaria.

Comencemos por analizar las propiedades semánticas. No cumplir la regla PP significa violar alguna de la condiciones formales. Si $0 \Rightarrow 0 = 0$ no se cumple MTE puesto que $N0 \Rightarrow N0 = 1$ y no es 0.[152] Si $1 \Rightarrow 0 = 1$ no se cumple MP puesto que una tesis implica un valor falso. Si $0 \Rightarrow 1 = 1$ no cumple MT puesto que en un enunciado tesis, si el consecuente es tesis, el antecedente también. Si $1 \Rightarrow 1 = 0$ no cumple ED puesto que $a \Rightarrow 1$ y $b \Rightarrow 1$ son tesis pero $1 = a_b \Rightarrow 1$ no lo es. Ninguno de estos casos puede tener un valor dialéctico porque

[150] Esta manera de demostrar la independencia proviene del célebre trabajo de David Hilbert (1862, 1943) *Grundlagen der Geometrie* (1899) [46] (Fundamentos de la geometría) donde construyó sistemáticamente "geometrías" para demostrar la independencia de sus numerosos axiomas. Sin duda Hilbert ha sido el padre del formalismo, por su obra y por sus propuestas de temas de investigación.

[151] Si a es una tesis, NNa también lo es ya sea que $a = 1$ –que es invariante– o ya sea un valor dialéctico porque el automorfismo NN transforma un valor dialéctico en otro. En forma similar se demuestra el caso recíproco. También EC se cumple porque si $a\ .\ b$ es una tesis, es claro que ni a ni b son 0, luego son tesis.

[152] Cabe preguntarse ¿en este razonamiento –y en los que siguen– qué lógica estamos aplicando? La respuesta es inmediata: la lógica binaria. Para esto se debe escribir el razonamiento sin abusos de lenguaje. *Hipótesis* $0 \Rightarrow 0 = 0$ *con valor lógico verdadero*, se aplica MTE y entonces $N0 \Rightarrow N0 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ *también tiene valor lógico verdadero* y no es 0. Entonces *se está en el caso de la regla PCE de la lógica binaria, luego la hipótesis es falsa*.

contradice IR. En resumen, la regla PP es consecuencia de las reglas MP, MT, MTE, ED e IR. Puede ser omitida del conjunto de las condiciones.

La tabla de verdad del Cuadro 21 no cumple con IR –porque $0 \Rightarrow a = a$ es una tesis pero $0 \Rightarrow b = a$ y no b– pero sí con las demás. Este contraejemplo –uno de los muchos posibles– muestra la independencia de esta propiedad de las restantes.

Cuadro 21: Función implicación en **D3** que no cumple IR.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	a	a	a	1
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	a
c	0	0	0	c	a
1	0	0	0	0	1

La tabla de verdad del Cuadro 22 no cumple con I –porque $a \Rightarrow a = 0$ y no a– pero sí con las demás propiedades, luego I es indepen-dendiente.

Cuadro 22: Función implicación en **D3** que no cumple I.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	a	b	c	1
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	b
c	0	0	0	0	c
1	0	0	0	0	1

En la Figura 23 se presenta un ejemplo –de los 12 casos posibles– de implicación que no cumple PM –con “mezcla” de valores dialécticos– y que cumple con todas las demás condiciones.

Con esto queda demostrada la no contradicción e independencia de las propiedades semánticas. El caso de las propiedades formales es algo más complicado, tal como lo ilustra la Figura 26. Esta figura –que no está en escala como es obvio– presenta las relaciones de dependencia de las diferentes propiedades. El rectángulo externo indica que hay 15.625 funciones en **D3** que cumplen con las propiedades IR, I y además, como todo reticulado dialéctico, EC y PNN. Los demás

Cuadro 23: Función implicación en **D3** que no cumple PM.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	a	b	c	1
a	0	a	0	0	b
b	0	0	b	0	c
c	0	0	0	c	a
1	0	0	0	0	1

rectángulos indican las propiedades y el número de casos asociados a cada propiedad hasta llegar a las 16 funciones implicación que cumplen con todas las propiedades.

Como es natural, se deduce también de este diagrama la independencia de algunas propiedades. Así por ejemplo, T es independiente de MP, MT, PCE puesto que hay contraejemplos posibles. Lo mismo sucede con MTE. MP y MT son independientes de PCE por la existencia de contraejemplos. También PCE es independiente de ED, ID es independiente de ED.

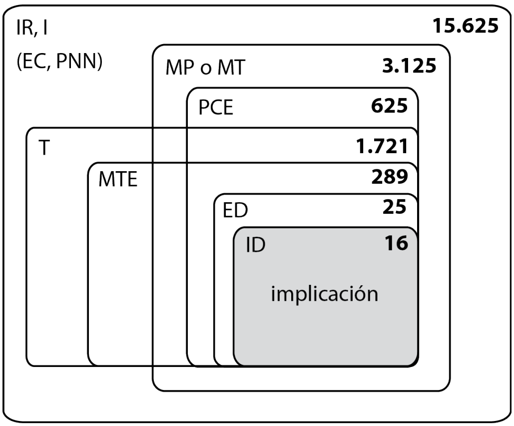


Figura 26: La implicación en **D3** y las propiedades formales.

Comencemos por analizar la definición clásica de Russell de la función implicación $x \Rightarrow y = N\,x + y$ que se puede extender directamente a los reticulados dialécticos con la simple condición que N sea una negación estricta. En el Cuadro 24 se presenta la tabla de verdad en el caso **D3**. Tiene el interés de servir de contraejemplo para muchas propiedades formales.

Cuadro 24: Tabla de verdad de la implicación clásica en **D3**.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	c	1	1	c	1
c	a	a	1	1	1
1	0	a	b	c	1

Esta función implicación no cumple MT ni MP –por ejemplo, $a \Rightarrow 0 = b$ es una tesis– pero sí cumple MTE. No cumple T, por ejemplo porque $1 \Rightarrow a = a$ y $a \Rightarrow 0 = b$ son tesis y conducen a que $1 \Rightarrow 0$ es una tesis. No cumple ED, porque $a \Rightarrow 0 = b$ y $b \Rightarrow 0 = c$ son tesis pero $1 = a + b \Rightarrow 0$ no lo es. No cumple PCE, porque para $1 \Rightarrow a = a$ y $1 \Rightarrow Na = b$ son tesis pero $N1 = 0$ no lo es. Por otra parte, cumple con PNN, ID y EC.

A los efectos de ejemplificar la dependencia de las propiedades consideraremos diversos casos. La regla ID es independiente porque existe *un contraejemplo* en **D3** y es la función dada por la tabla de verdad del Cuadro 25. En efecto, $a \Rightarrow a$ es una tesis, pero $a \Rightarrow a + b$ o sea $a \Rightarrow 1$ no es una tesis. Las demás reglas se cumplen, excepto naturalmente IC.

Cuadro 25: Función implicación en **D3** que no cumple ID.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	1
a	0	a	0	0	0
b	0	0	b	0	0
c	0	0	0	c	0
1	0	0	0	0	1

La regla ED tiene contrajemplos en **D3**, uno de los cuales se presenta en el Cuadro 26. En efecto, $a + b = 1$ es una tesis. $a \Rightarrow a$ y $b \Rightarrow a$ son tesis, pero $a + b \Rightarrow a$ no es una tesis. Todas las demás reglas se cumplen, excepto naturalmente IC.

Cuadro 26: Función implicación en **D3** que no cumple ED.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	a	b	c	1
a	0	a	c	b	a
b	0	c	b	a	b
c	0	b	a	c	c
1	0	0	0	0	1

La regla MTE tiene contrajemplos en **D3**, uno de los cuales se presenta en el Cuadro 27. En efecto $a \Rightarrow 1$ es una tesis, pero $0 \Rightarrow Na = b$ no lo es. Tampoco cumple ID porque $0 \Rightarrow 0$ es una tesis pero $0 \Rightarrow a = 0 + a$ no lo es.Todas las demás reglas, *incluyendo* MT, se cumplen, excepto naturalmente IC.

Cuadro 27: Implicación en **D3** que no cumple MTE ni ID.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	0	0	0	1
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	0	0	0	1

Este ejemplo pone de manifiesto un error en los esquema deductivos clásicos. Encontramos en [25, II, 10.23] el siguiente esquema formal (excepto el cambio de la notación) que "demuestra" MTE:

1)	$p \Rightarrow q$	hipótesis
2)	$p + Np$	hipótesis
3)	Nq	hipótesis subordinada
4)	$p + Np$	reiteración de 2) subordinada
5)	p	nueva hipótesis en segunda subordinación
6)	$p \Rightarrow q$	reiteración de 1) en segunda subordinación
7)	q	MP entre 5) y 6)
8)	Nq	reiteración de 3) en segunda subordinación
9)	Np	PCE a partir de 5), 7) y 8) en la subordinada
10)	Np	ED de 4) por 5) a 9)
11)	$Nq \Rightarrow Np$	implicación a partir de 3) a 10).

Este razonamiento emplea solamente las propiedades formales MP, PCE y ED, tales como cumple la tabla de verdad del Cuadro 27, que sabemos que no cumple la propiedad MTE y es un contraejemplo.[153] El error de razonamiento –que es muy fácil de incurrir– se encuentra en la aplicación incorrecta de ED en la línea 10. Se puede reiterar un enunciado en una subordinada pero no al revés. El enunciado 9 no se puede aplicar a la línea 4. Un error similar se encuentra en [25, II, 10.22].

Si consideramos el caso **D3** se obtiene también que:

- La regla T se cumple en todas las funciones con MTE y ED.
- La regla MP se cumple en todas las funciones con PCE.
- La regla PCE se cumple en todas las funciones con MTE y ED.

Estos ejemplos bastan para tener una idea de la complejidad del problema de la independencia de las reglas formales. Por razones de velocidad de cálculo no es simple analizar los casos de reticulados dialécticos más complejos puesto que el número de tablas de verdad a examinar en **rDn** crece como m^{m^2} donde $m = r \,.\, n + 2$ es el número de elementos a considerar en el reticulado.

[153] Hay otros casos en **D3** que también son contraejemplos, tal como es el caso de f_1, f_2, f_3 –ver más adelante– respectivamente $0, x, 0$ o $0, 1, 0$.

Para el caso más simple de reticulado dialéctico de dos niveles, **2D4** se tiene $m = 9$ y, como consecuencia $9^{81} \approx 1,97 \times 10^{77}$ casos a examinar. Como el punto no posee mayor interés práctico, dejamos aquí el tema.

Las funciones implicación en general

En esta sección analizamos el problema de las funciones implicación en un reticulado dialéctico cualquiera. El punto de partida es el Cuadro 5, de la página 117, que presenta la tabla de verdad de una función que cumple IR. A esta estructura se deben agregar las propiedades que la especializan para el caso considerado.

De acuerdo con el Teorema 30 para que la función implicación sea invariante en la rotación, deben serlo las cinco funciones de la tabla de verdad. Analicemos el caso de $f_1(y), f_2(x), f_3(y)$ y $f_4(x)$. Las únicas funciones $f_1(y)$ invariables en los automorfismos de los elementos dialécticos del reticulado, son $0, y, R\,y, RR\,y, \ldots, 1$, donde R es la rotación de los elementos y funciones análogas para los demás casos. La función $g(x, y)$ debe ser analizada en cada caso.

Teorema 53 *Para que se cumplan las propiedades formales y semánticas de la implicación debe ocurrir que $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, $f_3 = 0$ y $f_4 = 0$.*

Demostración. La propiedad MP exige que la función $f_4 = 0$. En efecto, si $d \Rightarrow 0$, donde d es un valor dialéctico, fuese una tesis, entonces 0 también lo sería. Esto ocurre para todos los valores dialécticos.

Si ocurriese $f_3 \neq 0$, por ejemplo, que $1 \Rightarrow a$ fuera una tesis, entonces MTE exige que $Na \Rightarrow 0$ también lo sea, en contra del MP.

La propiedad ED exige que las expresiones tales como $B \Rightarrow A$, donde A, B son máximos, sean falsas. En efecto, si $A \Rightarrow A$ y $B \Rightarrow A$ son tesis, entonces se concluye que $A + B \Rightarrow A$ o sea $1 \Rightarrow A$ y por MTE, $N\,A \Rightarrow 0$ en contra de $f_4 = 0$.

Si $f_1 > 0$ entonces $0 \Rightarrow x$ es una tesis, luego por MTE $Nx \Rightarrow 1$ también es tesis y entonces $f_2 > 0$. Si $f_2 > 0$ también ocurre $f_1 > 0$.

Consideremos dos máximos A, B. De la tesis $A \Rightarrow A$ se obtiene, por IC, que también es una tesis $A \Rightarrow A + B = 1$, luego está demostrado.

Si $f_2 = 0$ entonces consideremos dos máximos A, B, es claro que A es una tesis, pero $A \Rightarrow A + B = 1$ no lo es, luego no se cumple IC. Luego $f_2 > 0$ y también $f_1 > 0$ porque si no lo fuera, tampoco lo sería f_2. $\square$

En el Cuadro 28 se presenta la estructura general de la función implicación $x \Rightarrow y$ según lo ya demostrado. Como es visible sólo es necesario determinar dos funciones de una variable y una de dos variables, que deben cumplir con las propiedades formales de la implicación.

Cuadro 28: Tabla de verdad de la implicación genérica en **rDn**.

$\Rightarrow$	0	dialécticos	1
0	1	$f_1(y)$	1
dialécticos	$\vdots$ 0 $\vdots$	$g(x, y)$	$f_2(x)$
1	0	$\cdots$ 0 $\cdots$	1

De las propiedades anteriores de las funciones f_1, f_2 resulta que los únicos casos válidos en los reticulados **rDn** –sin considerar las rotaciones, el caso PM– son los cuatro presentados en el Cuadro 29. Las rotaciones aumentan el número de funciones posibles.

Cuadro 29: Las funciones auxiliares en **rDn**.

	f_1	f_2
1	y	x
2	1	x
3	y	1
4	1	1

La regla IR –la función sea invariante en una rotación– ya ha sido empleada en otras funciones de la lógica dialéctica, no tiene nada de especial. El análisis de la función $g(x, y)$ es un poco más complejo y se relaciona con las reglas formales y semánticas. La propiedad I exige que $g(x, x) = x$ para todos los valores.

Para determinar las posibles funciones implicación basta con verificar las restantes propiedades formales. La búsqueda sistemática de las funciones da solamente 16 casos en el reticulado **D3**. En el Cuadro 30 se muestran las 4 funciones implicación sin "mezcla".

Cuadro 30: Las 4 implicaciones sin "mezcla" en **Dn**.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	a	b	c	1
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	0	0	0	1

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	0	0	0	1

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	a	b	c	1
a	0	a	0	0	1
b	0	0	b	0	1
c	0	0	0	c	1
1	0	0	0	0	1

$\Rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	a	0	0	1
b	0	0	b	0	1
c	0	0	0	c	1
1	0	0	0	0	1

Los restantes casos se completan reemplazando x por $Rx, RRx, \cdots$ –y similares para y– en un reticulado **Dn**.

Las implicaciones básicas en **rDn**

En todo reticulado dialéctico **rDn** es posible encontrar funciones implicación. En cada reticulado existe una manera natural de construir funciones implicación –que cumplen las propiedades semánticas y formales– mediante la relación del orden del reticulado (con la excepción de los casos $0 \Rightarrow y$).

Definición 32 *En un reticulado dialéctico* **L** *para dos elementos x, y se definen* implicaciones básicas menores *como: 1) para $x \neq 0$, entonces para $x \leq y$ se define $x \Rightarrow y = x$; 2) para $x \not\leq y$ se define $x \Rightarrow y = 0$; 3) para los valores binarios se cumple con PP; 4) las función f_1 puede ser y o 1 y f_2 pueden ser x o 1.*

Esta definición extiende la definición clásica, no en forma analítica sino en su concepto básico: $0 \Rightarrow 0 = 1$, $0 \Rightarrow 1 = 1$, $1 \Rightarrow 1 = 1$ y $1 \Rightarrow 0 = 0$ es decir $x \leq y$ es verdadero, $x \not\leq y$ es falso.

Teorema 54 *La función definida en 32 cumple con las propiedades formales ID, EC, ED, PNN, T, MP, MTE, PC y con las propiedades semánticas PP, I, IR, y PM.*

Demostración. Procedemos ordenadamente a demostrar cada una de las propiedades, primero para $x \neq 0$ y luego para $x = 0$:

- ID Si $x \Rightarrow y = x$ se cumple $x \leq y \leq x + y$, luego $x \Rightarrow x + y = x$ es una tesis. Si $0 \Rightarrow y$ su valor es y por definición de f_1 y es una tesis. El caso $y = 0$ se cumple por definición.
- EC Si $x \,.\, y$ es una tesis entonces $x \,.\, y > 0$ y se cumple $x > 0$ y $y > 0$, luego ambas son tesis. El caso $x = 0$ carece de sentido.
- MP Si $x, x \Rightarrow y$ son tesis, se cumple $0 < x$ y $x \leq y$, luego $0 < x \leq y$. Entonces y es una tesis. El caso $x = 0$ carece de sentido.
- ED Si $x + y$ es una tesis y $x \Rightarrow z$, $y \Rightarrow z$, se cumple $x \leq z$, $y \leq z$, luego $x + y \leq z$ o sea $x + y \Rightarrow z$. Por el MP z es una tesis. El caso $x = 0$ se cumple por la definición de f_1.
- PNN Si x es una tesis, NNx también lo es, en el caso $x = 1$ por definición de la negación y en el caso restante porque el automorfismo NN transforma un valor dialéctico en otro. El caso $x = 0$ carece de sentido.
- T La relación de orden en el reticulado posee la propiedad transitiva, luego si $x \Rightarrow y$ y $y \Rightarrow z$ son tesis, se cumple $x \leq y \leq z$ luego $x \Rightarrow z$ es una tesis. El caso $x = 0$ cumple, por la definición de f_1, $0 \to y = y$ o sea $0 < y \leq z$ y z son tesis.
- MTE Si $x \Rightarrow y$ se cumple $x \leq y$, luego $Ny \leq Nx$ por la definición de la negación, de donde resulta $Ny \Rightarrow Nx$. Si $0 \Rightarrow y$, que es una tesis por definición de f_1, se cumple que $Ny \Rightarrow 1$ por definición de f_2. Si $x \Rightarrow 1$, que es una tesis por definición de f_2, se cumple que $0 \Rightarrow Nx$ que es una tesis por definición de f_1.

PCE Si $x \Rightarrow y$ y $x \Rightarrow Ny$ son tesis, entonces si $x = 0$, cosa que puede ocurrir por la definición de f_1, es claro que $N0 = 1$ es una tesis. El caso $x = 1$ es imposible porque $f_3 = 0$. Si x posee un valor dialéctico, entonces Nx es una tesis.

PP Forma parte de la definición de la función implicación.

IR La función es invariable en la rotación porque tanto f_1 como f_2 y la relación $x \leq y$ lo son.

I Es claro que $d \leq d$, luego $d \Rightarrow d = d$ para todo valor dialéctico d.

PM El principio de mezcla se cumple en algunos casos debido a que $d \Rightarrow d = d$ y las definiciones de f_1 y f_2 son sin rotación de los elementos.

Finalmente, como tenemos dos variantes posibles para f_1, f_2, hay 4 funciones definidas de esta manera. Este resultado es general para todos los reticulados **rDn**. Con esto queda demostrado el teorema. □

Es importante observar que este teorema vale tanto para *las negaciones comunes como para las negaciones exóticas*. En la demostración solamente interviene la propiedad de monotonía y la propiedad que la negación de un valor dialéctico es otro valor dialéctico. Tampoco es necesario que la negación sea *estricta*. Una consecuencia importante desde el punto de vista práctico consiste en observar que para buscar sistemáticamente las funciones implicación basta con emplear, por ejemplo, N_0. La función así obtenida es válida para toda otra negación del reticulado por IR y las relaciones entre negaciones y rotaciones.

Teorema 55 *La función implicación $x \Rightarrow y$ definida es mónotona, decreciente en x y creciente en y, para los valores dialécticos.*

Demostración. Consideremos solamente valores dialécticos. Si $z \leq x$, como $x \leq y$ se obtiene $z \leq y$, luego $z \Rightarrow y$. En forma similar se demuestra para $y \leq w$. □

Una consecuencia de este teorema permite obtener otras funciones implicación con características similares a las de este teorema.

> **Teorema 56** *Si en la definición de implicación menor se reemplaza la condición 1) por "para $x \neq 0$, entonces para $x \leq y$ se define $x \Rightarrow y = y$" también se obtienen 4 funciones que cumplen con las propiedades formales ID, EC, ED, PNN, T, MP, MTE, PC y con las propiedades semánticas PP, IR, I, PM. Se llaman* implicaciones básicas mayores.

Demostración. En la demostración anterior solamente aparece el valor de la función implicación en la propiedad ID, luego todas las demás propiedades son válidas. En el caso ID solamente se modifica en la demostración el texto: "Si $x \Rightarrow y = y$ se cumple $x \leq y \leq x + y$, luego $x \Rightarrow x + y = y$ es una tesis." □

En los reticulados **Dn** las implicaciones mayores y menores *coinciden*, no es así en los reticulados **rDn** de rango mayor que 1, tal como se ve en lo que sigue.

Hay otras funciones implicación que no son ni las llamadas menores o mayores, por ejemplo la presentada en el Cuadro 22: al no cumplir I no deriva de la relación de orden que exige esta condición. Si no se exige la condición IR en **D3** hay 4080 funciones implicación.

La tabla de verdad posee en forma parcial una tabla diagonal. Supongamos que ordenamos los valores de la tabla por valor dialécticos crecientes. Luego del 0 aparecen los átomos y así sucesivamente. En la Figura 31 se ilustra esta situación.

Cuadro 31: Análisis de la implicación en **rDn**.

$\Rightarrow$	0	a	$\cdots$	k	$\cdots$	1
0	1	f_1			f_1	1
a	0	a	$\cdots$	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	f_2
k	0	0	$\cdots$	k		
	0					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	f_2
	0					
1	0	0			0	1

Las implicaciones en **Dn**

Consideremos la *implicación básica* en **D4** como ejemplo del caso general en **Dn**. De acuerdo con la propuesta de la relación de orden se obtiene la tabla de verdad del Cuadro 32. Esta implicación permite obtener resultados universalmente válidos a partir de enunciados dialécticos. Tomemos como ejemplo el enunciado $a \Rightarrow x = a$ donde x es una incógnita. Como a es una tesis, se concluye que los valores posibles son $x = a, 1$ como consecuencia del Modus Ponens.

Cuadro 32: Tabla de la implicación en **D4**.

$\Rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	a	b	c	d	1
a	0	a	0	0	0	a
b	0	0	b	0	0	b
c	0	0	0	c	0	c
d	0	0	0	0	d	d
1	0	0	0	0	0	1

Además de estas funciones implicación, existen las tres adicionales con valores 1 tales como las presentadas en el Cuadro 30 para **D3**.

Teorema 57 *En **Dn** las implicaciones básicas son las únicas posibles.*

Demostración. En efecto supongamos, por ejemplo, que $a \Rightarrow h$ sea una tesis, donde a, h son dos valores dialécticos. Sea R la rotación del reticulado. Existe una rotación R^k tal que $h = R^k\, a$. Se tiene entonces que si $a \Rightarrow R^k\, a$ es una tesis, también lo es girando R^{n-k}, luego es una tesis $R^{n-k}\, a \Rightarrow a$ puesto que R^n en **Dn** es la identidad. Si $R^{n-k}\, a \neq a$, por la propiedad ED a partir de $a \Rightarrow a$ y $R^{n-k}\, a \Rightarrow a$ se obtiene que $1 = a + R^{n-k}\, a \Rightarrow a$ que contradice que $f_3 = 0$. Luego, aplicando la rotación, la función $g(x, y)$ solamente puede ser diferente de 0 en la diagonal. La regla I completa la demostración. $\square$

Las implicaciones en **2Dn**

En el Cuadro 33 se presenta la tabla de verdad de la función implicación básica menor en el reticulado **2D4** como primer ejemplo del caso general.

Cuadro 33: Tabla de la implicación menor en **2D4**.

⇒	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1
0	1	a	b	c	d	A	B	C	D	1
a	0	a	0	0	0	a	0	0	a	a
b	0	0	b	0	0	b	b	0	0	b
c	0	0	0	c	0	0	c	c	0	c
d	0	0	0	0	d	0	0	d	d	d
A	0	0	0	0	0	A	0	0	0	A
B	0	0	0	0	0	0	B	0	0	B
C	0	0	0	0	0	0	0	C	0	C
D	0	0	0	0	0	0	0	0	D	C
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Como es natural, también se aplican las funciones f_1, f_2 del Cuadro 29 que conducen a tres funciones implicación adicionales. En los reticulados **2Dn** la implicación básica mayor es diferente de la menor y en el Cuadro 34 se presenta un ejemplo de tabla de verdad.

Cuadro 34: Tabla de la implicación mayor en **2D4**.

⇒	0	a	b	c	d	A	B	C	D	1
0	1	a	b	c	d	A	B	C	D	1
a	0	a	0	0	0	A	0	0	D	a
b	0	0	b	0	0	A	B	0	0	b
c	0	0	0	c	0	0	B	C	0	c
d	0	0	0	0	d	0	0	C	D	d
A	0	0	0	0	0	A	0	0	0	A
B	0	0	0	0	0	0	B	0	0	B
C	0	0	0	0	0	0	0	C	0	C
D	0	0	0	0	0	0	0	0	D	C
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Igual que en el caso menor, hay tres funciones implicación adicionales cambiando f_1, f_2 por valores 1.

Teorema 58 *En* ***2Dn*** *las implicaciones básicas son las únicas posibles que cumplen con la condición PM.*

Demostración. A efectos de demostrar el teorema designamos con d_i a los átomos y con D_i a los máximos de **2Dn**, el índice i se considera módulo n. Sea R la rotación del reticulado y N la negación considerada, que realizan las siguientes transformaciones:

$$R\,d_i = d_{i+1}\ (i \bmod n) \qquad R\,D_i = D_{i+1}\ (i \bmod n)$$

$$N\,d_i = D_{i+1}\ (i \bmod n) \qquad N\,D_i = d_{i+2}\ (i \bmod n).$$

Se trata de identificar la función $g(x, y)$ y para eso consideraremos sucesivamente los cuatro "cuadrantes" en que se organiza según los valores dialécticos. La diagonal es inmediata. Por la propiedad I se cumple $d_i \Rightarrow d_i = d_i$ y $D_i \Rightarrow D_i = D_i$. En los restantes casos se basan en la propiedad que la suma de dos máximos cualesquiera del reticulado vale 1.

- *Cuadrante D–D*. Si se aplica el razonamiento usado en **Dn** para los máximos y se tiene para $D_0 \Rightarrow D_k = D_0 \Rightarrow R^k\,D_0$, luego $R^{-k}\,D_0 \Rightarrow D_0$, luego por ED sigue que $1 = D_0 + R^{-k}\,D_0 \Rightarrow D_0$ sería una tesis en contra de $f_3 = 0$. Como consecuencia $D_0 \Rightarrow D_k = 0$ para todo $k \neq 0$. Como consecuencia, aplicando la rotación, $D_j \Rightarrow D_k = 0$ para todo $j \neq k$.
- *Cuadrante d–d*. Consideremos $d_j \Rightarrow d_k$. Aplicando MTE se obtiene $N\,d_k \Rightarrow N\,d_j = D_{k+1} \Rightarrow D_{j+1} = 0$, luego $d_j \Rightarrow d_k = 0$ para todo $j \neq k$.
- *Cuadrante D–d*. Supongamos que $D_0 \Rightarrow d_i$ sea una tesis. Aplicando MTE se tiene $N\,d_i \Rightarrow N\,D_0 = D_{i+1} \Rightarrow d_2$ que también es tesis. Aplicando la rotación R^{2-i} a la primera implicación, se obtiene $R^{2-i}\,D_0 \Rightarrow R^{2-i}\,d_i = D_{2-i} \Rightarrow d_2$ que también es tesis. Por ED resulta $D_{i+1} + D_{2-i} \Rightarrow d_2$ que también es tesis. Pero la suma de dos máximos diferentes vale 1, luego para $i + 1 - (2 - i) = 2\,i - 1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \cdots$ lo son. Para $i = 0, 1$ se obtiene $1 = D_2 + D_1 \Rightarrow d_2 = 0$ y porque $f_3 = 0$, luego

la hipótesis de partida es falsa. En definitiva, $D_0 \Rightarrow d_1 = 0$ y $D_0 \Rightarrow D_0 = 0$. Por rotación, $D_j \Rightarrow d_{j+1} = 0$ y $D_j \Rightarrow d_j = 0$. Para $i = 2, -1$ se obtiene $D_0 \Rightarrow d_2 = 0$ y $D_0 \Rightarrow d_{-1} = 0$ y por rotación $D_j \Rightarrow d_{j+2} = 0$ y $D_j \Rightarrow d_{j-1} = 0$. Para $i = 3, -2$ se obtiene $D_0 \Rightarrow d_3 = 0$ y $D_0 \Rightarrow d_{-2} = 0$ y por rotación $D_j \Rightarrow d_{j+3} = 0$ y $D_j \Rightarrow d_{j-2} = 0$ y así sucesivamente. Luego todos los elementos verifican $D_j \Rightarrow d_k = 0$.

- *Cuadrante d–D*. La demostración es similar al cuadrante anterior. Supongamos que $d_0 \Rightarrow D_i$ sea una tesis. Aplicando MTE se tiene $d_{i+2} \Rightarrow D_1$ que también es una tesis. Aplicando la rotación R^{1-i} a la primera implicación, se obtiene $d_{1-i} \Rightarrow D_1$ que también es una tesis. Por ED resulta $d_{i+2} + d_{1-i} \Rightarrow D_1$ que también es una tesis. Pero la suma de dos átomos con índices separados 2 o más, vale 1, lo que contradice $f_3 = 0$, luego la hipótesis de partida es falsa. Luego para $i + 2 - (1 - i) = 2\,i + 1 = \pm 3, \pm 5, \cdots$ lo son. Para $i = 1, -2$ se obtiene que $d_0 \Rightarrow D_1 = 0$ y $d_0 \Rightarrow D_{-2} = 0$. Para $i = 2, -3$ se obtiene que $d_0 \Rightarrow D_2 = 0$ y $d_0 \Rightarrow D_{-3} = 0$ y así sucesivamente. Luego, por rotación son nulos $d_i \Rightarrow D_{i+1} = 0$, $d_i \Rightarrow D_{i+2} = 0$ y similares. También ocurre $d_i \Rightarrow D_{i-2} = 0$, $d_i \Rightarrow D_{i-3} = 0$ y similares. No se sabe nada de $d_i \Rightarrow D_i$ ni de $d_i \Rightarrow D_{i-1}$.
- Consideremos la tesis $d_i \Rightarrow d_i$, también son tesis $d_i \Rightarrow d_i + d_{i+1} = D_i$ y $d_i \Rightarrow d_i + d_{i-1} = D_{i-1}$. Para cumplir con PM debe ocurrir que $d_i \Rightarrow D_i$ valga o bien d_i o bien D_i y lo mismo sucede en el otro caso.

Con esto se completa la demostración. □

Si omitimos la propiedad PM –mezcla de los valores dialécticos– en el cuadrante d–D se pueden reemplazar los valores por otros obtenidos por rotación. Así por ejemplo, en el Cuadro 34 se puede reemplazar el valor por $a \Rightarrow A = B$ y los correspondientes por rotación. Esta función cumple con todas las propiedades formales y semánticas excepto PM.

Vale la pena observar que para la demostración de este teorema se emplearon las propiedades IR, I, PM, ED y MTE en forma directa y MTE, MP, y ED para demostrar que $f_3 = 0$. Algo similar ocurrió en la demostración en **Dn**. En estos dos casos resulta entonces que IR, I, PM, MP, ED y MTE son suficientes para verificar que se cumplen las demás propiedades formales y semánticas, algo que también está sugerido por la Figura 26. Es una conjetura razonable que este resultado sea general para todos los reticulados dialécticos, pero no incursionaremos en este punto porque tiene interés solamente desde un punto de vista teórico y no aporta demasiado a la lógica dialéctica.

Las implicaciones en **3Dn**

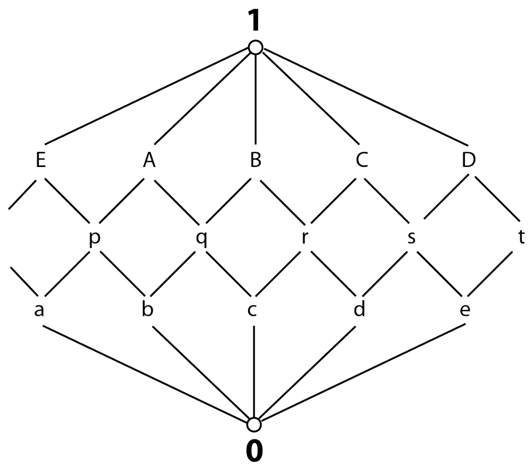


Figura 27: Reticulado **3D5** como ejemplo de **3Dn**.

Vale la pena considerar la función implicación en el reticulado **3D5**, ver Figura 27, porque presenta una variante importante en la tabla de verdad. En el Cuadro 35 se presenta la tabla de verdad que corresponde a la implicación definida por la relación de orden en el reticulado.

Este resultado ilustra la implicación básica menor en todos los reticulados **rDn**. En forma similar se puede definir el caso mayor.

La demostración de que las propiedades formales y semánticas conducen a una implicación básica es bastante más complicada que en el caso **2Dn**. Si bien se aplican –en líneas generales– los argumentos para los cuadrantes formados por los átomos y máximos, aquí aparecen tres nuevos cuadrantes: el de los elementos centrales y los elementos

Cuadro 35: Tabla de la implicación menor en **3D4**.

⇒	0	a	b	c	d	e	p	q	r	s	t	A	B	C	D	E	1
0	1	a	b	c	d	e	p	q	r	s	t	A	B	C	D	E	1
a	0	a	0	0	0	0	a	0	0	0	a	a	0	0	0	a	a
b	0	0	b	0	0	0	b	b	0	0	0	b	b	0	0	0	b
c	0	0	0	c	0	0	0	c	c	0	0	0	c	c	0	0	c
d	0	0	0	0	d	0	0	0	d	d	0	0	0	d	d	0	d
e	0	0	0	0	0	e	0	0	0	e	e	0	0	0	e	e	e
p	0	0	0	0	0	0	p	0	0	0	0	p	0	0	0	p	p
q	0	0	0	0	0	0	0	q	0	0	0	q	q	0	0	0	q
r	0	0	0	0	0	0	0	0	r	0	0	0	r	r	0	0	r
s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	s	0	0	0	s	s	0	s
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t	0	0	0	t	t	t
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A	0	0	0	0	A
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	B	0	0	0	B
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C	0	0	C
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	D	0	D
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	E	E
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

centrales con átomos y máximos en los cuales hay que desarrollar una argumentación nueva. Esta argumentación se basa fuertemente, igual que en los casos anteriores en las propiedades formales MTE y ED y en las propiedades de la rotación. La demostración es un tema no tratado.

La implicación y la propiedad IC

En esta sección se considera en especial la propiedad de inserción de la conjunción, IC, propiedad que no cumple la implicación dialéctica estudiada. No obstante esto es posible construir teorías sin que el no cumplimiento de IC sea una restricción para las reglas de la deducción.

Consideremos ahora una teoría en la cual los axiomas tengan valores lógicos que pertenecen a un *cono* –Definición 14– **S**. Es claro que todos los teoremas de esta teoría también pertenecen a **S** por el principio de mezcla PM. En efecto, el principio de mezcla evita que la función implicación construya un teorema fuera del cono **S** puesto que los valores dialécticos no se mezclan. Esta situación suministra una importante pista semántica sobre la implicación dialéctica.

Para estos sistemas lógicos es válida la propiedad IC de la implicación puesto que si dos afirmaciones de la teoría posen valores lógicos $x, y \in \mathbf{S}$, entonces el enunciado $x \,.\, y \in \mathbf{S}$. De esta manera se puede asegurar que toda teoría cuyos axiomas tengan valores lógicos que pertenecen a un cono, cumplen con todas la propiedades formales de la implicación.

Como conclusión, todo razonamiento válido empleando las reglas formales, también es válido para los valores dialécticos en un cono. Esto permite generalizar sin modificaciones las teorías matemáticas y de las ciencias naturales –fuertemente apoyadas en razonamientos lógicos– a valores dialécticos sin la menor alteración. Este punto se considera en detalle en el capítulo final de este estudio.

La dialéctica de los predicados

Introducción

Una función proposicional es una aplicación del universo real –o de un fragmento del universo– sobre un reticulado. Para la lógica tradicional las funciones proposicionales son *funciones abstractas*, para la dialéctica materialista las funciones proposicionales representan *propiedades materiales*. Por esta razón, agregaremos la palabra "material" a la mayoría de los enunciados sobre funciones proposicionales.

Igual que en la lógica tradicional, se puede llamar *propiedades* a las funciones proposicionales de una única variable y *relaciones* a las funciones proposicionales de varias variables. Consideremos la proposición simple

Lope **ama**.

Esta proposición en realidad es una instancia material de una propiedad $F(x)$ de la variable material x que recorre el conjunto de los seres humanos o cualquier otro conjunto apropiado que se desee. La propiedad puede ser expresada como:[154]

$F(u) = u$ **ama**.

Interesa investigar los valores lógicos que toma esta función proposicional. En la lógica binaria tenemos dos opciones puesto que solamente existen dos valores lógicos. El panorama es diferente cuando entramos en la dialéctica. En estos casos cabe preguntarse por los valores que la función proposicional puede tomar. Es comprensible que esta función no tome el valor lógico "verdadero" para ningún x porque este hecho es casi imposible de interpretar. No puede entenderse que

[154] Solamente para dejar constancia, vale la pena recordar que esta proposición es diferente –pero próxima– de la *relación* $P(u, v) = u$ **ama** v.

la proposición al tomar el valor "verdadero" sea compatible con el significado material o real, por ejemplo, de la propiedad "amar". Así por ejemplo, parecería que –excepto algún santo que sea patológicamente incapaz de odiar– las personas comunes mezclan sus sentimientos y pueden "no amar" ya sea por momentos (lógica temporal) ya sea por grados (lógica modal).[155] Casi las mismas razones se puede esgrimir en el caso del valor lógico "falso".

Pensemos ahora en este otro problema: ¿cual es la propiedad contraria de $F(u)$? La respuesta es múltiple y compleja. Como ya se señaló en una nota anterior, las siguientes proposiciones

$H(u) = u$ **odia**

$I(u) = u$ **es un fanático religioso**

$J(u) = u$ **está fuera de sus cabales**

$K(u) = u$ **está muerto**

$L(u) = u$ **es un personaje de una obra literaria**

y muchas otras similares, que se vinculan claramente con los estados emocionales de la persona, todas son, de acuerdo con su significado material, propiedades contrarias a $F(u)$ en algún sentido. Por eso nos interesa caracterizar la propiedad dialéctica de la contradicción material en forma precisa.

Definición 33 *Dos propiedades $F(u)$ y $G(u)$ se llaman* contrarias materiales *si, para alguna negación definida N, para cada valor x de la variable material* u *ocurre $F(x) = N\,G(x)$.*

La noción de contrarios materiales es una noción básica para la dialéctica. La noción de propiedad es corriente en matemática. En este caso, se trata de una función proposicional que solamente toma valores "verdadero" y "falso". La importancia de extender a la dialéctica esta noción resulta del hecho que la función pueda tomar valores dialécticos.

[155] También parecería que es una licencia poética –empleada en un celebrado soneto de Quevedo– que una persona pueda "amar" más allá de la muerte.

La mayoría de las propiedades que empleamos en el lenguaje cotidiano de hecho toman solamente valores dialécticos, porque nada de la vida cotidiana es propiamente "verdadero" o "falso", es algo intermedio.

La lógica hegeliana –y todas las dialécticas más complejas– pueden resolver este problema. Puesto que la dialéctica hegeliana posee tres valores dialécticos, cualquier función proposicional que tome valores dialécticos posee una gran cantidad de propiedades contrarias. Por cada valor dialéctico existen dos valores dialécticos contrarios y de allí que una propiedad que solamente tome valores dialécticos, tal como $F(u)$, posee una cantidad enorme de funciones contrarias. A título ilustrativo, una función hegeliana tal como $F(u)$, que está definida sobre un conjunto que posee n instancias materiales –todos los seres humanos, a título de ejemplo– posee (potencialmente) la cantidad de 2^n funciones proposicionales contrarias. Este número, cualquiera es astronómicamente grande. La existencia de más de dos valores contrarios entre sí es el salto en calidad que provoca el el cambio en calidad. Se trata, una vez más, de la aplicación de las leyes de la dialéctica.

Los cuantificadores clásicos

En la lógica binaria se introduce la noción de cuantificador como un elemento esencial del estudio de las funciones proposicionales. Estas ideas se puede generalizar directamente a la dialéctica. Resulta inmediato, puesto que están definidas las operaciones "." y "+", en cualquier reticulado, existen cuantificadores que extienden las propiedades del cuantificador existencial y del universal, definidos formalmente de la misma manera que en la lógica binaria.

Definición 34 *En todo reticulado dialéctico, si $F(u)$ es una función proposicional en la variable $u_i \in$ **C**, se pueden definir los cuantificadores* existenciales *y* universales *como*

$$\exists u\, F(u) = F(u_1) + F(u_2) + \ldots \qquad \forall u\, F(u) = F(u_1) \,.\, F(u_2) \,.\, \cdots$$

extendida a los valores de las variables materiales que se cuantifica y u representa un conjunto de variables materiales $u = (x, y, \ldots)$.

El siguiente teorema analiza la conducta del cuantificador universal en un reticulado dialéctico.

Teorema 59 *La condición necesaria y suficiente para que $\forall u\, F(u)$ sea 0 es que alguna instancia de la función $F(u)$ sea 0. La condición necesaria y suficiente para que el cuantificador universal sea 1 es que todas las instancias de la función sean 1. La condición necesaria y suficiente para que el cuantificador universal sea un valor dialéctico es que todos los valores de la función pertenezcan a un* cono $d > 0$.

Demostración. Para que un producto sea 0 al menos un factor debe ser 0. Recíprocamente, si un factor es 0, el producto es nulo. Para que un producto sea 1 es necesario que todos los factores sean 1 y esta condición es suficiente. Si $\forall u\, F(u) = d$ es un valor dialéctico $d > 0$, entonces todo valor $F(u_i)$ verifica que $F(u_i)\,.\,(\forall u\, F(u)) = \forall u\, F(u)$ por aplicación de las propiedades conmutativa, asociativa e idempotente. Luego $F(u_i)\,.\,d = d$, o sea $F(u_i) \geq d$ y pertenece al cono de los elementos tales que $x \geq d$ como se debía demostrar. En forma recíproca, si para todo i, $F(u_i) \geq d$, donde $d > 0$ entonces $\forall u\, F(u) \geq d > 0$ y es una tesis. □

El siguiente teorema analiza al cuantificador existencial dialéctico.

Teorema 60 *La condición necesaria y suficiente para que $\exists u\, F(u)$ sea 0 es que todas las instancias de la función $F(u)$ sea 0. La condición necesaria y suficiente para que el cuantificador existencial sea 1 es que alguna instancia de la función sea 1. La condición necesaria y suficiente para que el cuantificador existencial sea un valor dialéctico es que todos los valores de la función pertenezcan a un* cono invertido $d < 1$.

Demostración.[156] Para que una suma sea 0 todos los sumandos deben ser 0 y recíprocamente. Para que una suma sea 1 basta que una instancia de la función sea 1 y recíprocamente. Si $\exists u\, F(u) = d$ es una valor dialéctico $d < 1$, entonces $F(u_i) + \exists u\, F(u) = \exists u\, F(u)$ por

[156] Es posible realizar esta demostración por aplicación directa del Teorema 65.

aplicación de las propiedades conmutativa, asociativa e idempotente. Luego $F(u_i) + d = d$, o sea $F(u_i) \leq d < 1$ y pertenece al cono invertido de los elementos tales que $x \leq d$ como se debía demostrar. En forma recíproca, si para todo i, $F(u_i) \leq d$, donde $d < 1$ entonces $\forall u\, F(u) \geq d < 1$ y es una tesis. □

Esta definición generaliza los cuantificadores de la lógica binaria y conserva la semántica fundamental de la existencia y la universalidad como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 61 *Para los cuantificadores $\forall, \exists$ se cumple, si p es una instancia de la variable u:*

$$\forall u\, F(u) \Rightarrow F(p) \qquad F(p) \Rightarrow \exists u\, F(u).$$

Demostración. Por la definición de cuantificador, las propiedades A, C y por la monotonía del producto resulta, para todo valor del reticulado

$$\forall u\, F(u) = F(u_1)\, .\, \cdots\, .\, F(p)\, .\, \cdots \leq F(p)$$

puesto que p es una de las instancias de la variable u. Luego $\forall u\, F(u) \Rightarrow F(p)$ por la Definición 32. En forma dual, se cumple

$$F(p) \leq F(u_1) + \cdots + F(p) + \cdots = \exists u\, F(u)$$

Luego $F(p) \Rightarrow \exists u\, F(u)$. □

Los cuantificadores dialécticos en general

La extensión de la definición de los cuantificadores clásicos a los reticulados de la lógica dialéctica no solamente corresponde de la definición formal sino también con las propiedades funcionales que se esperaban. Desde este punto de vista, así como se puede generalizar la implicación, también se generaliza la lógica de predicados sin mayores contratiempos. Sin embargo hay buenas razones para pensar que esta manera de proceder deja muchos aspectos de la dialéctica de lado. Hegel en su *Ciencia de la Lógica* [42] dedica un largo volumen a lo que llama la “teoría del ser”. Por este solo hecho debemos estar advertidos que la "teoría del ser" (los cuantificadores dialécticos, desde el punto de vista formal) debe ser bastante más compleja que una extensión rutinaria de las ideas de la lógica binaria.

El camino metodológico que emplearemos para analizar el problema de los cuantificadores es formal. Tal como hemos considerado antes, la lógica binaria es una simplificación, un homomorfismo demasiado radical de las propiedades estructurales del Universo. Por su misma simplificación, la lógica binaria solamente nos suministra indicios acerca del problema.

De acuerdo con esto podemos elaborar la definición general de *cuantificador dialéctico*.

Definición 35 *Se llama* cuantificador $\reflectbox{K}$ *de la función proposicional* $F(u)$, *asociado a la operación dialéctica* no trivial *representada por* $\diamond$, *idempotente, asociativa, conmutativa, invariante en la rotación (I, A, C, IR), además de las propiedades de monotonía PB y PD y de permanencia de las reglas binarias PP, a la expresión:*

$$\reflectbox{K}\, u\, F(u) = F(u_1) \diamond F(u_2) \diamond \ldots$$

extendida a todos los valores de las variables materiales sobre las cuales se cuantifica. La variable u *puede representar a un conjunto de variables materiales* $u = (x, y, \ldots)$.

En esta definición se descarta la operación *trivial* $\diamond$ ($x \diamond x = x$ y todos los demás valores 0) que cumple con las propiedades I, A, C, IR, PB y PD pero carece de aplicaciones interesantes.

Como es inmediato, esta definición generaliza la definición de la lógica binaria y contiene como casos particulares a los cuantificadores existencial y universal definidos en la lógica binaria. En efecto, puesto que las operaciones "." y "+" son operaciones I, A, C, IR, PB y PD, los dos cuantificadores –respectivamente $\forall$ y $\exists$– se encuentran comprendidos en la definición. Es posible demostrar un resultado inverso.

Teorema 62 *Los únicos cuantificadores dialécticos, no triviales, en el reticulado binario* ***B*** *=* ***D0*** *son los derivados de las funciones de las operaciones conjunción y disyunción.*

Demostración. La demostración se reduce a observar que las únicas funciones I, A, C, IR, de las 16 funciones posibles en este reticulado, son las indicadas. □

El Teorema 62 asegura la consistencia de las definiciones, pero todavía deja demasiado terreno libre.[157]

Teorema 63 *Si consideramos un cuantificador* ꓘ *y su operación de composición asociada* $\diamond$*, se cumple la propiedad*

$$\text{ꓘ}\, u\,(F(u) \diamond G(u)) = \text{ꓘ}\, u\, F(u) \diamond \text{ꓘ}\, u\, G(u)$$

Demostración. Es inmediata a partir de la propiedad asociativa y conmutativa de la composición $\diamond$. □

En la definición 35 se establece una clara conexión entre las funciones penetración y los cuantificadores. El panorama de los cuantificadores queda ahora completamente definido. Existen tres grandes grupos asociados a las ideas del "ser" y estos conjuntos están asociados a los grandes grupos de funciones lógicas: las operaciones básicas del reticulado y las penetraciones. Es natural, entonces, que existan dos familias de cuantificadores dialécticos, los *cuantificadores amplios* provenientes de las penetraciones amplias y los *cuantificadores estrictos*, de las penetraciones estrictas. En lo que sigue se estudian estos casos.

Los cuantificadores dialécticos amplios

En la simplificación que realiza la lógica binaria se pierde enteramente un tipo de cuantificadores. Empleamos la notación $\forall, \exists$ con el significado de la Definición 34 para los cuantificadores clásicos y $\text{ꓘ}, \text{ꓘ}_n$

[157] Así por ejemplo, en los reticulados **Dn** las funciones no triviales que posibles son cuatro: la conjunción, la disyunción y las dos funciones penetración.

respectivamente a los obtenidos mediante las funciones penetración amplia $*, *_n$.

Teorema 64 *Para los cuantificadores* ꓘ *y* ꓘ_n *y toda función proposicional se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\forall u\, F(u) \leq \text{ꓘ} u\, F(u) \leq \exists u\, F(u)$$

$$\forall u\, F(u) \leq \text{ꓘ}_n u\, F(u) \leq \exists u\, F(u)$$

extendidas a todos los valores de las variables materiales sobre las cuales se cuantifica. La variable u *puede representar a un conjunto de variables materiales* $u = (x, y, \ldots)$.

Demostración. Las propiedades son inmediatas a partir de la monotonía de las funciones involucradas. En efecto, consideremos el caso de $*$, por definición

$$\text{ꓘ} u\, F(u) = F(u_1) * F(u_2) * F(u_3) * \cdots$$

Es claro que se cumple, por la propiedad asociativa y por PB y PD

$$F(u_1) * (F(u_2) * F(u_3) * \cdots) \leq F(u_1) + (F(u_2) * F(u_3) * \cdots)$$

También es claro que

$$F(u_2) * (F(u_3) * \cdots) \leq F(u_2) + (F(u_3) * \cdots)$$

Aplicado estas desigualdades en forma reiterada, ocurre

$$F(u_1) * F(u_2) * F(u_3) * \cdots \leq F(u_1) + F(u_2) + F(u_3) + \cdots$$

con lo cual queda demostrado $\text{ꓘ} u\, F(u) \leq \exists u\, F(u)$. En forma dual se demuestra para el producto $\forall u\, F(u) \leq \text{ꓘ} u\, F(u)$. Luego el teorema se cumple para el cuantificador ꓘ. Las mismas relaciones se cumplen para ꓘ_n puesto que $*_n$ cumple las mismas desigualdades que $*$, con lo cual queda demostrado el teorema. $\square$

La vinculación entre las negaciones y $*$, $*_n$ se traslada a los cuantificadores.

Teorema 65 *Para todo cuantificador* $\rightthreetimes$ *y toda negación* N *se cumple:* $N \rightthreetimes u\, F(u) = \rightthreetimes_n u\, NF(u)$ *y dualmente intercambiando* $\rightthreetimes$ *y* $\rightthreetimes_n$*. Análogamente se cumple:* $N\, \forall u\, F(u) = \exists u\, NF(u)$ *y dualmente intercambiando* $\forall$ *y* $\exists$*.*

Demostración. Consideremos la expresión, que es válida por la propiedad asociativa de $*$,

$$
\begin{aligned}
N \rightthreetimes u\, F(u) &= N(F(u_1) * F(u_2) * F(U_3) * \ldots) \\
&= N(F(u_1) * (F(u_2) * F(U_3) * \ldots)) = \\
&= NF(u_1) *_n N((F(u_2) * F(U_3) * \ldots)) = \\
&\ldots \\
&= NF(u_1) *_n NF(u_2) *_n NF(U_3) *_n \ldots = \rightthreetimes_n u\, NF(u)
\end{aligned}
$$

Por recurrencia resulta demostrado el teorema. El caso dual se demuestra de la misma manera. En el caso de los cuantificadores clásicos la demostración es igual, reemplazando las funciones penetración por suma y producto. □

Las definiciones realizadas permiten investigar las propiedades básicas de los cuantificadores amplios por extensión de las propiedades en la lógica binaria.

Teorema 66 *La condición necesaria y suficiente para que* $\rightthreetimes_n u\, F(u)$ *sea una tesis es que todos los valores* $F(u_i)$ *sean tesis.*

Demostración. Para que $\rightthreetimes_n u\, F(u) = 0$, algún $F(u_i) = 0$. Luego, para que el cuantificador sea una tesis todos los valores deben ser tesis. Recíprocamente, si todos los valores son tesis, el resultado no es 0. □

Este resultado muestra que el cuantificador $\rightthreetimes_n$ se puede llamar "universal", extendiendo la noción binaria de "verdadero" a "tesis" tal como se realiza en la dialéctica.

Teorema 67 *La condición necesaria y suficiente para el cuantificador $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, F(u)$ valga 1 es que al menos una instancia i sea $F(u_i) = 1$. La condición necesaria y suficiente para que $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, F(u)$ sea un valor dialéctico es que para todo i, $F(u_i) \geq d$, donde $d > 0$ es un valor tesis del reticulado. Equivalentemente, los valores de la función pertenecen a un cono no trivial del reticulado. En los demás casos vale 0.*

Demostración. Como ocurre $x * 1 = 1$ es claro que si una instancia de la función vale 1, el cuantificador vale 1. Recíprocamente, es necesario que alguna instancia valga 1 para que el resultado sea 1. Es claro que si para todo i se cumple $F(u_i) \geq d$ entonces, se cumple $d \leq \forall u\, F(u) \leq \reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, F(u)$, Teorema 64, y el cuantificador es una tesis. Recíprocamente, si $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, F(u) = d$ se cumple $0 < d < 1$. Luego todo $F(u_i) \neq 1$ y por lo tanto ocurre, ver Definición 26, que $\forall u\, F(u) = \reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, F(u)$ y se aplica el Teorema 59. El cuantificador vale 0 en los demás casos. $\square$

El cuantificador simétrico cumple un teorema también simétrico.

Teorema 68 *La condición necesaria y suficiente para que valga 0 es que al menos una instancia i sea $F(u_i) = 0$. La condición necesaria y suficiente para que $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, F(u)$ sea un valor dialéctico es que para todo i, $F(u_i) \leq d$, donde $d < 1$ es un valor dialéctico del reticulado. Equivalentemente, los valores de la función pertenecen a un cono invertido no trivial del reticulado. En los demás casos vale 1.*

Demostración. Consideremos la función $N^{-1}F(u)$ y el cuantificador $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, N^{-1}F(u) = N^{-1}\reflectbox{\ensuremath{\lambda}}_n u\, F(u)$ por el Teorema 65. Aplicando la negación a la igualdad queda $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}}_n u\, F(u) = N \reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, N^{-1}F(u)$. El Teorema 67 permite demostrar las condiciones. Para que $x = \reflectbox{\ensuremath{\lambda}}_n u\, F(u)$ valga 0, debe ocurrir que $\reflectbox{\ensuremath{\lambda}} u\, N^{-1}F(u)$ valga 1, luego al menos una instancia i de $N^{-1}F(u_i) = 0$ o sea, una instancia $F(u_i) = 1$. Para que el valor del cuantificador sea dialéctico es que para todo i, $N^{-1}F(u_i) \geq d$, donde $d > 0$ es un valor tesis, o sea, $F(u_i) \leq N\, d = d' < 1$.[158] El

[158] El teorema se puede demostrar también en forma directa a partir de la definición

cuantificador vale 1 en los demás casos.□

Los cuantificadores amplios se comportan diferente respecto a la propiedades del Teorema 61 tal como muestra el siguiente teorema.

Teorema 69 *Para el cuantificador amplio* ꓘ *se cumple, si* p *es una instancia de la variable* u*, que* $\text{ꓘ}\, u\, F(u) \Rightarrow F(p)$*, siempre que el cuantificador no valga 1.*

Demostración. Sea $d = \text{ꓘ}\, u\, F(u)$. Si $d = 0$ el teorema es válido en forma trivial. Si $1 > d > 0$ entonces se cumple que $F(p) \geq d$ por el Teorema 67, luego se cumple la implicación. Si $d = 1$ hay casos en los cuales no vale la expresión, basta que $F(p)$ sea 0 o dialéctico. □

Teorema 70 *Para el cuantificador amplio* ꓘ_n *se cumple, si* p *es una instancia de la variable* u*, que* $F(p) \Rightarrow \text{ꓘ}_n u\, F(u)$*, siempre que el cuantificador no valga 0.*

Demostración. Sea $d = \text{ꓘ}\, u\, F(u)$. Si $d = 1$ el teorema es válido en forma trivial. Si $1 > d > 0$ entonces se cumple que $F(p) \leq d$ por el Teorema 68, luego se cumple la implicación. Si $d = 0$ hay casos en los cuales no vale la expresión, basta que $F(p)$ sea 1 o dialéctico. □

En el Cuadro 36 se presentan las propiedades principales de los cuantificadores dialécticos analizados en estas últimas secciones.

Cuadro 36: Resumen de los cuantificadores dialécticos.

	$\exists$	$\forall$	ꓘ	ꓘ_n
falso	$\forall i\, F(u_i) = 0$	$\exists i\, F(u_i) = 0$	demás casos	$\exists i\, F(u_i) = 0$
tesis	$\forall i\, F(u_i) \leq d$ $d < 1$	$\forall i\, F(u_i) \geq d$ $d > 0$	$\forall i\, F(u_i) \geq d$ $d > 0$	$\forall i\, F(u_i) \leq d$ $d < 1$
verdadero	$\exists i\, F(u_i) = 1$	$\forall i\, F(u_i) = 1$	$\exists i\, F(u_i) = 1$	demás casos

del cuantificador. Esta demostración ilustra la manera de emplear la dualidad existente entre ꓘ y ꓘ_n.

Los cuantificadores dialécticos estrictos

Como ya se ha analizado, existe un segundo tipo de funciones penetración que hemos designado como estrictas y solamente ocurren en los reticulados de rango impar. Asociados a estas funciones existen sus correspondientes cuantificadores. El único caso que es interesante es para las penetraciones $\bar{*}^d$, donde se cumple el siguiente teorema.

Definición 36 *Se llama* cuantificador estricto $\bar{\reflectbox{K}}^{d}$ *de la función proposicional* $F(u)$*, asociado a la penetración dialéctica estricta* $\bar{*}^d$*, idempotente, asociativa, conmutativa, invariante en la rotación (I, A, C, IR), además de las propiedades PB y PD, a la expresión:*

$$\bar{\reflectbox{K}}^{d} u\, F(u) = F(u_1)\,\bar{*}^d\, F(u_2)\,\bar{*}^d \ldots$$

extendida a todos los valores de las variables materiales sobre las cuales se cuantifica. La variable u *puede representar a un conjunto de variables materiales* $u = (x, y, \ldots)$.

Estos cuantificadores poseen propiedades diferentes de los cuantificadores amplios. La propiedad más importante ocurre cuando los valores de las variables materiales pertenecen a un *cono*.

Teorema 71 *Los cuantificadores estrictos de una función proposicional* $F(u)$ *toma valores tesis si y solamente si todas las instancias* u_i *de la función están en un cono* $u_i \geq d > 0$ *del reticulado. Valen 1 solamente si todas las instancias cumplen* $F(u_i) = 1$*. En todos los demás casos valen 0.*

Demostración. Si están en un cono como el indicado, el cuantificador es una tesis. Recíprocamente, para que el cuantificador no sea nulo, todas las instancias deben estar en un cono como el indicado. Para que el resultado del cuantificador valga 1, la única posibilidad, en el caso de la penetración $\bar{*}^d$ es que todas las instancias valgan 1. □

La semántica de los cuatificadores dialécticos

El aporte de los cuantificadores dialécticos a la lógica general es diverso pero no muy significativo en el presente estudio. Para comenzar, los cuantificadores existenciales y universales *extienden las nociones de la lógica binaria*. Esta extensión es muy significativa al analizar las aplicaciones de la dialéctica a las ciencias. En la medida que se acepta que las teorías matemáticas y científicas pueden poseer valores dialécticos, la extensión de las propiedades de la implicación y la lógica de las funciones propoposicionales también debe ser extendida y con las mismas propiedades formales. Esto se analiza en el capítulo final.

Nace así la pregunta ¿qué aportan los nuevos cuantificadores dialécticos derivados de las funciones penetración? La respuesta a esta cuestión no viene de la ciencia sino de la lógica espontánea de las lenguas naturales. Regresemos al problema de la "ilógica" de la definición del amor, ver la página 19.

Los sonetos de Petrarca, Lope y tantos otros, según el análisis realizado, no son sino un cuantificador dialéctico sobre las pasiones humanas. En particular, los definidos sobre las penetraciones estrictas. Regresemos a la descripción de Lope de Vega de la página 132:

> (desmayarse, atreverse, estar furioso), (áspero, tierno), (liberal, esquivo, alentado), (mortal, difunto, vivo), (leal, traidor), (cobarde, animoso).

Para formalizar esta descripción es necesario introducir diversas funciones proposicionales, que se aplican sobre el universo de los seres humanos u, tales como:

$P_1(u) = u$ **se desmaya**

$P_2(u) = u$ **se atreve**

$P_3(u) = u$ **está furioso**

Este ejemplo de tres estados humanos ilustra las ideas. Cada una de estas funciones proposicionales describen *una pasión*[159] y se aplican a

[159] El DLE [19] define así la palabra pasión: *3. lo contrario a la acción; 4. estado pasivo en*

todos los seres humanos. Por otra parte no pueden tomar sino un valor dialéctico: nadie puede estar furioso en forma absolutamente verdadera, tendrá furia por momentos y por otro, estará en calma, indiferente o durmiendo, para citar algunas posibilidades. Aceptemos entonces que estas funciones proposicionales sólo pueden tomar valores dialécticos.

Pasemos ahora al tema de las comas. Como ya se ha analizado anteriormente, esta coma representa una función lógica con las propiedades I, A, C y que posee un valor intermedio entre la conjunción y la disyunción. En otras palabras, es una función penetración. Con estas consideraciones, el primer paréntesis de la definición de Lope se puede formalizar como

$$P_1(u) \bar{*}^d P_2(u) \bar{*}^d P_3(u).$$

Es legítimo preguntarse por qué emplear la penetración estricta y no la penetración amplia. Hay varias razones posibles. Una primera razón es que las penetraciones amplias posee una versión dual obtenida por negación. Parece claro que las pasiones referidas en este caso carece de una negación bien definida y ésta es una de las razones. Una segunda razón se encuentra en el empleo de pares o ternas de pasiones y esto sugiere fuertemente a la penetración estricta que cumple mejor con la condición de estado intermedio entre dos situaciones extremas.[160]

La misma técnica se puede aplicar a los otros pares o ternas de pasiones humanas. Así por ejemplo, podríamos definir:

$P_4(u) = u$ **es áspero**

$P_5(u) = u$ **es tierno**

y la formalización de la descripción como

$$P_4(u) \bar{*}^d P_5(u).$$

---

el sujeto; 5. perturbación o afecto desordenado del ánimo; 6. inclinación o preferencia muy vivas de alguien a otra persona; 7. apetito de algo o afición vehemente a ello. Oxford [70] emplea una definición similar: *strong and barely controllable emotion; a state or outburst of strong emotion; intense sexual love; an intense desire or enthusiasm for something; a thing arousing enthusiasm.*

[160] No obstante estas consideraciones, cualquiera de los cuantificadores definidos –y esto incluye los cuantificadores clásicos– cumplen esta propiedad. Los cuantificadore estrictos conducen a valores más simétricos.

Queda entonces por definir la función que reemplaza a las comas que unen los pares y las ternas de estados pasionales. Nuevamente resulta claro que esta función es I, A, C y que posee un valor intermedio entre la conjunción y la disyunción: es otra función penetración.

Para continuar debemos precisar el empleo de la palabra "pasión". Es claro que, además de las pasiones humanas referidas al amor, hay otras pasiones humanas que no tienen nada que ver con ellas. En la página 198 se muestran otros casos, posiblemente contrarios al amor. Los reticulados dialécticos suministran herramientas para analizar esta situación. Consideremos, como ejemplo, los casos

$I(u) = u$ **es un fanático religioso**

$J(u) = u$ **está fuera de sus cabales**

Sin duda hay muchas maneras de ser un *fanático religioso* o de *estar fuera de sus cabales*. Las diferentes religiones que existen o existieron muestran diferentes ejemplos.[161] La psiquiatría muestra muy diferentes estados posible de anomalías de conducta que pueden ir desde un autista a un asesino serial y que ilustran el segundo ejemplo.

Como ya se ha propuesto, estas situaciones de pasión humana son, en una clara medida, contrarias a las pasiones que despierta el amor. Desde el punto de vista dialéctico debemos considerar que adquieren valores dialécticos contrarios. En una forma esquemática y dentro del reticulado **3Dn** se podría establecer la siguiente asociación:

- las pasiones amorosas toman valores en el intervalo (a, p, A),
- las pasiones religiosas toman valors en el intervalo (b, q, B),
- las anomalía de conducta toman valores en el intervalo (c, r, C).

y así podríamos seguir con otras pasiones contrarias. Es claro que cada grupo de pasiones humanas es contraria a todos los otros grupos de pasiones, pero no hay ninguna dificultad en asignarse valores lógicos.

[161] Sin ánimos de elaborar una lista completa, están los ascetas cristianos, los cátaros o los templarios en el cristianismo; los derviches o los mártires musulmanes en el islam; los combatientes de la *guerra florida* entre los aztecas y tantos otros.

La definición del amor adquiere ahora una expresión formal muy simple y directa. Según la expresión definida en la página 197 se obtiene:

$$F(x) = P_1(x) \mathbin{\bar{*}^d} P_2(x) \mathbin{\bar{*}^d} P_3(x) \mathbin{\bar{*}^d} P_4(x) \mathbin{\bar{*}^d} P_5(x) \mathbin{\bar{*}^d} \cdots$$

que puede expresarse también, si empleamos la notación $P(i, x) = P_i(x)$, como

$$F(x) = \overline{\reflectbox{K}}^{d} i\, P(i, x).$$

Queda así explicada la semántica y el uso del cuantificador dialéctico estricto y, por extensión, de todos los cuantificadores dialécticos definidos.

Las paradojas

Introducción a las paradojas lógicas

La existencia de paradojas en la lógica suele ser uno de los puntos de más dificultad para los lógicos. Toda paradoja encierra una verdad nueva; lejos de ser un obstáculo en una teoría, es un manantial de nuevas ideas: tal es el poder creador de la contradicción. Esta manera de observar las contradicciones es una manera esencialmente dialéctica. Muchos autores expresaron su admiración por las paradojas. W. K. Chesterton no podía pensar sino a través de paradojas. Wilde decía con mucho acierto:

> El camino de la verdad es el camino de las paradojas. Para verificar la Realidad es necesario verla en la cuerda floja. Cuando las verdades se convierten en acróbatas, recién se puede juzgarlas.[95]

Las paradojas en la lógica binaria pueden ser clasificadas en dos grandes tipos, las paradojas que se originan en ecuaciones proposicionales y las paradojas que se originan en ecuaciones funcionales. En su fondo común se caracterizan porque tienen una presentación que se encuentra dentro de límites aceptables para la lógica pero conduce a una contradicción. La lógica clásica binaria puede soportar todo excepto una contradicción y de allí que aparezca un problema. En la lógica dialéctica la contradicción no presenta dificultades.

Las paradojas lógicas son resueltas por los lógicos de un modo brutal: declaran que los procedimientos operativos que llevan a formular las ecuaciones contradictorias *no son correctos*. Suele invocarse con bastante insistencia la noción de un meta–nivel y de la imposibilidad de que la lógica opine sobre la lógica. Esta solución quirúrgica, de extirpar todo lo que molesta, impide obtener de las paradojas toda la riqueza del contenido que poseen.

En este capítulo consideraremos algunas paradojas conocidas y comentaremos someramente otras, sin realizar un estudio particular.

La paradoja del condenado

Un ejemplo clásico de paradoja, cuyo origen se pierde en las historias medievales, lo constituye el problema del condenado a muerte, ver [12, II, li]. En su planteo, a un condenado se le da la opción de elegir la forma de morir, con la salvedad de que si miente, va a morir ahorcado; si dice la verdad, morirá decapitado. Como es fácil imaginar, un condenado hábil declara que va a morir ahorcado. Supongamos que realizamos las siguientes identificaciones proposicionales:

x	es la afirmación que hace el condenado a muerte
a	el condenado muere decapitado si dice la verdad
b	el condenado muere ahorcado si no dice la verdad
V	es el conjunto de las afirmaciones verdaderas

Las dos opciones del condenado son:

$$(x \in V) \Rightarrow a \qquad \text{si dice la verdad, muere decapitado}$$
$$N(x \in V) \Rightarrow b \qquad \text{si no dice la verdad, muere ahorcado}$$

Con estas ecuaciones, la afirmación $x = b = N\,a$ conduce a la expresión:

$$(N\,a \in V) \Rightarrow a \quad \text{o sea} \quad N\,a \Rightarrow a$$

Se llega así a una contradicción inaceptable para la lógica binaria, pero perfectamente aceptable para la lógica dialéctica. Su enunciado "voy a morir ahorcado" posee valor de *tesis* pero no es *verdadero*. Interpretado en el pensamiento corriente, nada hay de obligatorio y de compulsivo, tanto puede morir de una manera como de otra, lo cierto es que morirá. En cambio, en la lógica clásica la paradoja nace de que no puede resolver el hecho de que un condenado a muerte se salve porque un sistema de ecuaciones no posee solución y no se puede decidir el procedimiento de su ejecución.

Lo interesante es que la paradoja puede continuar. Supongamos que el condenado anterior se salva por no poder resolver la paradoja lógica. La sociedad –aprendiendo de este caso– entonces introduce una nueva ley para evitar que vuelva a ocurrir otra vez esta situación.

x	la afirmación que hace el condenado a muerte
a	el condenado muere decapitado si dice la verdad
b	el condenado muere ahorcado si no dice la verdad
c	el condenado muere envenenado si enuncia una paradoja
V	es el conjunto de las afirmaciones verdaderas
P	es el conjunto de las afirmaciones paradójicas

Con el nuevo esquema legal el problema posee tres leyes sociales:

$(x \in V) \Rightarrow a$	si dice la verdad, muere decapitado
$N(x \in V) \Rightarrow b$	si no dice la verdad, muere ahorcado
$(x \in P) \Rightarrow c$	si enuncia una paradoja, muere envenenado

El nuevo condenado afirma ahora $x = c$ y esto conduce a que no puede morir envenenado, porque entonces dijo la verdad y no enunció una paradoja, le corresponde a. Pero entonces no dijo la verdad y luego le corresponde b. Al mismo tiempo, es claro que enunció una paradoja y le corresponde c, pero entonces volvemos al principio y dijo la verdad. La contradicción persiste. Por más que se agreguen nuevas leyes tales como “si dice una paradoja de segundo orden, muere fusilado” no se levanta la contradicción. En resumen, en la dialéctica no hay tal contradicción y ocurre lo obvio, si está condenado a muerte, morirá, no importa el método de ejecución.

La paradoja de Protagoras

Algo similar ocurre con la paradoja de Protagoras, ver [83, X]. En este problema clásico, Protagoras ha instruido a un alumno en el arte de pleitear, con la condición de que le pague cuando gane un juicio. La paradoja nace cuando el alumno se niega a pagar su educación y Protagoras le entabla un juicio. Se llega entonces a un caso sin solución. Cualquiera sea el resultado del juicio, no se puede concluir lógicamente si el alumno debe o no pagar. Examinemos el problema con las siguientes proposiciones:

a Protagoras recibe su pago
b el alumno gana un juicio
c Protagoras gana el juicio a su alumno

El problema es muy rico en enunciados para expresar todos los vericuetos legales. Las posibilidades para Protagoras son:

1)	$b \Rightarrow a$	contrato: si gana un juicio, Protagoras cobra
2)	$Nb \Rightarrow Na$	contrato: no gana un juicio, no cobra
3)	$c \Rightarrow a$	pleito: gana Protagoras y recibe el pago
4)	$c \Rightarrow Nb$	pleito: gana Protagoras, consecuencia indirecta
5)	$Nc \Rightarrow Na$	pleito: pierde Protagoras, no cobra
6)	$Nc \Rightarrow b$	pleito: pierde Protagoras, consecuencia indirecta

Es sencillo convencerse que estas seis ecuaciones en la lógica binaria carecen de solución. En cambio, en términos dialécticos el problema es diferente. Para comenzar 1) y 2) son equivalente por MTE. De 4) por MTE resulta $NNb \Rightarrow Nc$, o sea, 7) $b \Rightarrow Nc$, que combinada con 5) por T, da 8) $b \Rightarrow Na$. De 1) y 8) por el PCE resulta que Nb es una tesis, luego por MP en 2), Na es una tesis y también b es una tesis. De 7) y 6) resulta que b y Nc son equivalentes, luego Nc es un tesis y también c es una tesis. De acuerdo con esto, el problema posee solución y las tres proposiciones toman valores dialécticos. Se resuelve así el "sentido común" y se logra una solución al problema: las tres proposiciones son tesis y es natural que Protagoras reciba su pago, pierda o gane el juicio.

La paradoja de Epimenides

La paradoja de Epimenides –o la paradoja de los mentirosos– presenta, en la forma más simple, la limitación básica de la lógica binaria. En su forma clásica, ver [81] para ésta y otras paradojas, se supone que Epimenides, el cretense, enuncio la frase

todos los cretenses son mentirosos.

La paradoja nace de la confrontación entre este enunciado y el enunciado implícito

el autor del enunciado es cretense.

Se han realizado muchas otras presentaciones de la paradoja, con diferentes grados de complejidad, pero en la forma presuntamente original es donde se encuentra toda la riqueza del problema.

Comencemos por una afirmación metodológica que la mayoría de los lógicos no aceptaran: nada impide que una persona imite a Epimenides y enuncie una frase que conduzca a la misma paradoja. El cerebro de esta persona no estalla ni se bloquea al intentar esta operación presuntamente prohibida, nada ocurre en el mundo material. Aquí se encuentra el verdadero problema que los lógicos omiten. Si el cerebro y el universo fueran *binarios puros*, estos enunciados no se podrían hacer, del mismo modo que no se puede caminar por las paredes o burlar las leyes de la termodinámica. Dicho todo de otra manera, lo verdaderamente sorprendente en la paradoja de Epimenides es que no existe ninguna repugnancia, ninguna violencia natural, ninguna imposibilidad física en enunciaría. Cualquier hombre razonable –y hasta un lógico de profesión– puede entender el enunciado:

yo miento

a pesar de que encierra todo el problema de Epimenides. Es simplemente absurdo suponer que este enunciado cotidiano –los hombres mienten frecuentemente y, a veces, lo confiesan– sea imposible. Solamente una posición idealista radical puede imaginar que el enunciado debe ser desterrado de la vida de los hombres por ser imposible para el pensamiento. Para la dialéctica la paradoja de Epimenides encierra una trampa artificial que no ocurre en el mundo real.

Es frecuente afirmar que la paradoja nace de una confusión de jerarquías de enunciados. Desde el momento en que una afirmación juzga la validez de otra afirmación se sostiene que se ha superado un nivel y que se ha pasado de la lógica a la meta–lógica. Esta manera fácil de interpretar las paradojas fue puesta de moda por Russell para escapar a su paradoja sobre la clases y popularizada por Tarski para escapar de las demás paradojas.

Esta manera de escapar a la paradoja es equivocada. Como presentaremos en lo que sigue, el fondo del problema de Epiménides –porque no debemos continuar llamándolo paradoja una vez que sabemos que no existe– no se encuentra en una mezcla de jerarquías sino en la pretensión de encontrar una solución binaria a un problema lógico no binario. De hecho [81] ya había adelantado esta idea, pero en forma muy embrionaria.

A efectos de precisar el análisis del problema de Epimenides, aceptemos la siguiente versión, algo más precisa:

1) a la siguiente afirmación es falsa,
2) b la anterior afirmación es verdadera.

La paradoja nace de suponer que el enunciado a es verdadero puesto que entonces b es falso y de allí resulta que a no es verdadero. Algo similar ocurre si suponemos que el enunciado a es falso. Como el enunciado a no puede ser ni verdadero ni falso, se plantea la presunta paradoja de Epimenides.

En un estudio de la dialéctica es natural afirmar que a posee un valor tesis, diferente de verdadero y de falso. El problema se puede enunciar: 1) $a \Rightarrow Nb$, 2) $b \Rightarrow a$, luego, por T resulta $b \Rightarrow Nb$, luego por PC Nb es una tesis y luego b también lo es. Pero analizaremos con mayor detalle los pasos para llegar a este punto.

Supongamos que procedemos con auxilio de la lógica espontánea del cerebro, sin dejarnos atrapar en dificultades artificiales. Es claro que los enunciados del problema de Epimenides también se pueden formular como:

a dice que el enunciado b es falso,
b dice que el enunciado a no es falso.

Hasta ahora hemos cambiado verdadero por la negación de falso, lo que no parece inquietar demasiado. Consideremos la función proposicional:

$$f(x) = \text{el enunciado } x \text{ es falso.}$$

Con esta función, el problema de Epimenides se convierte en:

$$a = f(b) \qquad b = Nf(a).$$

El primer enunciado dice: a establece que b es falso. El segundo enunciado dice: b establece que a no es falso. El problema de Epimenides consiste en estudiar si estas ecuaciones poseen o no una solución.

La solución clásica consiste en negar que el problema posea significado. La función $f(x)$ por un lado debe ser una función proposicional, pero por otro, debe ser una función lógica. Este es el argumento de confusión de niveles que se suele invocar para escapar a la paradoja. Pero seamos algo más amplios de criterio y sigamos adelante. Aceptemos que $f(x)$ pueda ser una función lógica y que sea válido opinar sobre la validez de una preposición. En este caso la contradicción continua de esta manera. Es muy claro que $f(x)$ solamente puede ser una de las dos únicas funciones lógicas que existen: $f(x) = x$ o $f(x) = Nx$. Es razonable suponer que nos debemos referir a la segunda. Si suponemos que la función coincide con la primera, lo cual ya evidencia un gusto singular por la interpretación de la afirmación "x es falso", se llega a la ecuación final: $a = Na$.

Con esta interpretación, el problema de Epimenides consiste en resolver el sistema de ecuaciones lógicas:

$$a = Nb \qquad b = NNa.$$

Vale la pena notar que no hemos supuesto que la negación es una operación involutoria. Si reemplazamos b en la primera ecuación se llega a $a = NNNa$. Esta ecuación posee solución en una multitud de lógicas posibles. Así por ejemplo, en la lógica hegeliana, a puede tomar uno cualquiera de los tres valores dialécticos, cualquiera sea la negación que se considere. Aun en lógicas donde la negación sea de segundo grado –cosa que también ocurre en algunas negaciones hegelianas–, la ecuación resultante $a = Na$ posee solución. Así por ejemplo, en la lógica modal definida en **C3** existe solución. En la lógica hegeliana, en **D3**, con la negación $N = (0\,1)$ existen tres soluciones. Aunque parezca sorprendente, también existen soluciones en las lógicas booleanas de grado mayor que 1, por ejemplo para la negación $N = (0\,1)$: es claro que en la dialéctica *yin–yang*, tanto *yin* como *yang* son soluciones para esta negación. En resumen, el único problema que existe es decidir si un sistema de ecuaciones lógicas posee o no solución en un determinado ambiente lógico, no otra cosa. Más aun, las soluciones que hemos encontrado nos autorizan a traducir a un lenguaje directo el resultado obtenido: *los cretenses solamente enuncian tesis estrictas, jamás verdades o falsedades* y en este maravilloso resultado se ha convertido la pretendida paradoja de Epimenides. Vale la pena observar que si se pretende extraer el significado de la frase "yo miento" mediante una actitud espontánea, se llegara a la simple conclusión que la persona que realiza tal afirmación no es digna sino de un crédito parcial. Sus afirmaciones poseen un estigma de duda, por ejemplo, característico de la lógica modal o un estigma de validez temporal, característico de la lógica hegeliana.

Es interesante observar que existe una manera muy simétrica de enunciar el problema de Epimenides, mediante tres afirmaciones:

a la afirmación b es falsa,
b la afirmación c es falsa,
c la afirmación a es falsa.

De aquí resulta, con un análisis similar al realizado, que a debe coincidir con su mútiple negación. Por este procedimiento se podría continuar. Como se comprende, en los casos que se realice un número par de enunciados existe solución binaria y ni siquiera hay paradoja. En cambio, basta que el número sea impar para que el mundo lógico se derrumbe. Esta sensibilidad a la paridad de los números no se vincula con las jerarquías de interpretación y los meta–enunciados sino con la existencia o no de soluciones de un sistema de ecuaciones lógicas. Parece increíble que el problema de la existencia de soluciones de un sistema pueda ser considerado como fundamental y que se piense que se tambalean los cimientos de la lógica con un ejemplo trivial de sistema de ecuaciones sin solución. Algo similar le ocurrió a la matemática cada vez que encontró un problema sin solución, pero la experiencia secular de los matemáticos, luego de examinar los problemas, se aventuró valientemente dentro de otros campos numéricos. Esta aventura dejo marcas profundas en la matemática. Los números "irracionales" o los números "imaginarios" muestran dos claras heridas en el orgullo matemático de quienes pretendieron resolver dos simples ecuaciones de segundo grado. Exactamente lo mismo le ocurrió a la lógica con el problema de Epimenides.

La paradoja de Russell

Estudiaremos aquí problemas que poseen un marcado carácter funcional. Dentro de estos problemas se destaca con nitidez la llamada paradoja de Russell. Por la importancia desde el punto de vista teórico, esta paradoja es un punto de atención importante para la comprensión dialéctica de la matemática.

Comencemos el estudio en el punto donde suele comenzar el problema, en la llamada *paradoja de los barberos*. Para esto definamos la función proposicional:

$$F(x, y) = x \text{ afeita a } y$$

Esta función está definida sobre el conjunto de los hombres –de una cierta localidad, para fijar las ideas–. Sea b el barbero de la localidad. En el enunciado del problema, el barbero afeita a todos los que no se afeitan por sí mismos. Esta condición se puede expresar como una tabla de verdad:

	$F(x,x)$	$F(b,x)$
x no se afeita a sí mismo	0	1
x se afeita a sí mismo	1	0

En esta tabla se establece la doble condición en la cual actúa el barbero. Así planteado el problema, resulta entonces la ecuación proposicional: $F(b, x) = NF(x, x)$. La paradoja nace al aplicar esta ecuación al propio barbero porque se tiene: $F(b, b) = NF(b, b)$.

En la lógica binaria esta ecuación carece de solución. No cualquier ecuación funcional que caprichosamente se nos ocurra tiene que poseer solución. Este es un resultado conocido desde mucho tiempo atrás en la matemática. Es fácil comprender entonces que la llamada paradoja no es otra cosa que un problema sin solución, por ingeniosa y plausible que parezca el planteo. El segundo aspecto que interesa destacar es que en una infinidad de lógicas –por ejemplo en la lógica modal– existe solución para el problema y ésta establece que "el barbero afeita a el barbero" posee el valor de tesis. Esta solución no es un simple juego de variables. En el planteo del problema de los barberos se han dejado muchas definiciones de lado. Se ha considerado con demasiada ligereza el problema de la cantidad de barberos en la región y el carácter verdadero en forma absoluta de que existan personas que jamás se afeitan a sí mismas.

Consideremos ahora la paradoja de Russell, muy similar al problema de los barberos. Una clase se define por una propiedad $p(x)$. Para cada individuo x se sabe si la propiedad $p(x)$ es verdadera o falsa (en el planteo de la lógica binaria). Aceptemos, tal como en forma espontánea aceptó Russell, que x también pueda ser una propiedad. Podemos entonces estudiar cual es el valor de $p(p)$: ¿verdadero o falso? Sea entonces la función $F(p) = Np(p)$ que expresa la propiedad que p no posee la propiedad p. Hemos construido así la función proposicional F que comprende las clases que no se contienen a si mismas, según el enunciado clásico. Veamos ahora la pretendida paradoja. Al igual que en el caso de los barberos, aquí hay una ecuación funcional que –eventualmente– podría no poseer solución. El problema de Russell ocurre cuando se elige F como propiedad a estudiar. Se llega así a $F(F) = NF(F)$.

Como ya conocemos, esta ecuación no posee solución en la lógica binaria pero si en otras lógicas dialécticas, con el valor "tesis" por ejemplo. Cabe preguntarse si esta respuesta conduce a algo interesante o si es una simple salida artificiosa. El problema de fondo se encuentra en el hecho que un elemento x pertenece a una clase p (valor verdadero), no pertenece (valor falso) o pertenece en forma dialéctica (valor tesis). Por esta razón no es artificioso el resultado de Russell, en lugar de ser un obstáculo es una clara demostración que la noción de clase debe ser extendida en forma dialéctica.

Conclusiones

La existencia de ecuaciones proposicionales o funcionales sin solución en una determinada lógica no es una paradoja sino un problema matemático conocido. La matemática ya había encontrado muchas veces esta situación. De los ejemplos anteriores no debe pensarse que todo problema posee solución en alguna lógica dialéctica. Todo problema de lógica proposicional puede ser expresado como un sistema de ecuaciones del tipo:

$$E_1 = v_1$$

$$\ldots$$

$$E_p = v_q$$

donde E_i son expresiones lógicas con un cierto número de proposiciones incógnitas y se cumple $v_1 = 0, 1$. No imponemos ningún tipo de restricción al problema. En la lógica clásica, para evitar el problema de las referencias recíprocas, no se acepta la posibilidad de escribir la igualdad de dos expresiones ni la mezcla de variables. Pero nada de esto evita que existan sistemas de ecuaciones lógicas sin solución.

Una primera observación consiste en que se puede considerar que todas las expresiones son del tipo $E_i = 0$ porque una ecuación del tipo $E_1 = 1$ es equivalente a $N\, E_1 = 0$. Una segunda consideración consiste en observar que un sistema de expresiones que se exige que sean falsas es equivalente a:

$$E_1 + \cdots + E_p = 0.$$

Luego de estas observaciones se puede demostrar que en todo reticulado dialéctico y para toda negación se pueden formular paradojas.

Teorema 72 *En todo reticulado, para todo x, y, z y toda negación N, la expresión $p(x, y, z) = x + y + z \,.\, Nx + Nz \,.\, Ny$ es una tesis.*

Demostración. Para que la expresión sea 0, deben ser 0 todos los sumandos y de allí que se tengan que cumplir las ecuaciones: $x = 0$, $y = 0$, $z.Nx = 0$ y $Nz.Ny = 0$. Reemplazando x, y en las dos ecuaciones restantes resulta $z = 0$ y $Nz = 0$ que carecen de solución en todo reticulado, para toda negación. Queda demostrado entonces que no existe ninguna terna de valores para la cual vale 0 la expresión, luego se trata de una tesis. □

Como es inmediato, se pueden agregar nuevas variables a la expresión y continuar siendo una tesis, basta con agregar tantos términos del tipo $w \,.\, Nx + Nw \,.\, Ny$ como se desee. Por el contrario, se pueden eliminar variables en la expresión asignando valores 0 a y con lo cual queda $x + z \,.\, Nx + Nz$ y también 0 a z y se obtiene $x + Nx$ que son tesis en todo reticulado y toda negación.

Como otro corolario de este teorema, en todo reticulado, para toda negación y todas las funciones lógicas existen ecuaciones o sistemas de ecuaciones que no poseen solución. La ecuación $p(x, y, z) = 0$ es un ejemplo. Son lo que los lógicos clásicos llaman *paradojas*.

La existencia de paradojas sugiere que existe otro nivel de complejidad en la dialéctica en el cual se pueden resolver estos problemas. Esto queda para un análisis futuro.

La dialéctica en las ciencias

Introducción general

En los primeros capítulos de este libro hemos mostrado que el pensamiento natural humano emplea estructuras lógicas que desbordan a la lógica binaria. Por esta razón se desarrollaron muchas lógicas multivaluadas, modales y de otras especies. La propuesta que se realizó en este estudio fue crear una estructura formal –reticulados, negaciones y funciones lógicas– que permitieran formalizar todo este rico contenido lógico. En este capítulo final se muestra cómo se usan estas estructuras en las ciencias formales, naturales y sociales.

Los reticulados de rango 1, **Dn**, permiten comprender los enunciados contradictorios simples. Las Figuras 2, 3 y 5 muestran ejemplos de estos reticulados. Los valores dialécticos se puede interpretar como valores intermedios entre "verdadero" y "falso". Esto se necesita para interpretar los enunciados de Wilde sobre el arte, los sonetos del amor y la mayoría de las paradojas. Estos reticulados también permiten interpretar naturalmente la noción de *devenir de los contrarios*. Nada impide que algo se convierta en su contrario si posee un valor dialéctico. Tanto los elementos en Jonia como en China poseían esta propiedad sin violar ninguna regla del pensamiento. En cambio, es un absurdo que un teorema matemático pase a ser falso, a menos que se descubra un error en su demostración, lo cual mostraría simplemente que *siempre fue falso*.

Los reticulados de rango 2, **2Dn**, permiten comprender que existen dos tipos de contrarios: los contrarios *sincrónicos* y los contrarios *diacrónicos*. En la Figura 28 se ilustra esta situación. Para comenzar, en estos reticulados existe la negación $\tilde{N}_0 = (0\,1)(a\,D)(b\,A)\cdots$ que muestra la existencia de contrarios sincrónicos. No puede existir uno sin el otro, están unidos por pares indisolubles, son la *unidad y lucha de contarios*. Pero en el mismo reticulado existe otra negación $N_0 =$

$(01)(a\,C\,d\cdots)(A\,b\,D\cdots)$ que relaciona contrarios diacrónicos, relacionados por el *devenir*.

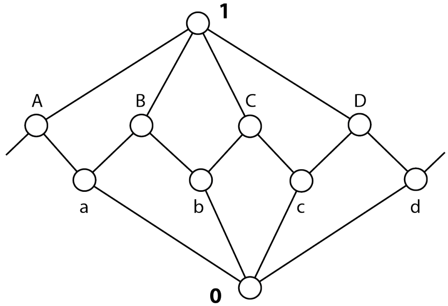


Figura 28: Reticulado genérico de rango 2.

Esto muestra que un mismo reticulado –con las mismas relaciones de "más verdadero que"– negaciones diferentes construyen interpretaciones estáticas o dinámicas de la realidad. La lógica dialéctica –igual que la lógica binaria– suministra un esquema de interpretación. Del mismo modo que el conocer las reglas del razonamiento no genera automáticamente el conocimiento matemático, el conocimiento de las reglas formales de la dialéctica tampoco genera, por sí, resultados sobre la realidad.

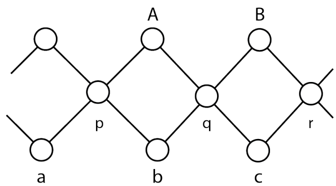


Figura 29: Reticulado genérico de rango 3.

Aclarado este punto, la semántica en los reticulados de rango 3, **3Dn**, –y, por extensión los de rango superior– resulta de inmediato, tal como se muestra en la Figura 29. En este reticulado existen los dos tipos de contrarios, sincrónicos y diacrónicos como ocurría en **2Dn** con un agregado de un elemento intermedio –entre a y A aparece el elemento p en la figura, pero en rangos mayores hay más elementos intermedios, contrarios entre sí– que permite interpretar otros conceptos del materialismo histórico: los estamentos intermedios entre las clases contrarias.

Estos reticulados más complejos muestran que los contrarios sincrónicos –igual que los diacrónicos– pueden ser más de dos. Un ejemplo claro ocurre con los *sabores*. En Occidente se identifican cuatros contrarios sincrónicos: amargo, ácido, dulce y salado. En Oriente –en particular en la India– se agregan dos más: picante y astringente. En Japón se agregó el séptimo sabor, *umami*, característico de los pescados, mariscos y hongos.

Introducción a la dialéctica en las ciencias formales

Las ciencias formales se caracterizan por poseer una estructura axiomática que sirve como punto de partida para construir una teoría puramente deductiva. Hay tantas ciencias formales como posibles conjuntos de axiomas, la única condición que se exige es que los axiomas no sean contradictorios.

La no contradicción de un conjunto de axiomas está lejos de ser un problema trivial. Solamente en los casos de muy pocos axiomas es posible demostrar la no contradicción. El único método fiable para realizar esta demostración consiste en construir un ejemplo concreto preferentemente *finito* –con un ejemplo infinito se entra en un terreno especialmente difícil– algo que no siempre es posible o se ha logrado.

Conocemos en el presente varios grupos de ciencias formales:

- la lógica binaria y la lógica dialéctica;
- la matemática que se puede separar en dos grandes ramas: la matemática discreta y la teoría del continuo;
- las diferentes geometrías;
- la teoría de los algoritmos o de la manipulación de símbolos.

En la matemática discreta suele ser sencillo encontrar ejemplos finitos que cumplan con los axiomas. Así por ejemplo, los axiomas de la teoría de grupos no son contradictores porque hay una gran cantidad de ejemplos finitos que cumplen con sus axiomas. La teoría del continuo tiene *la apariencia* de no ser contradictoria, pero no está libre de grandes dificultades teóricas, algunas de las cuales aparecen en lo que sigue. Las geometrías, a partir de la obra de David Hilbert [46], son tan libres de contradicción como lo sea la teoría del continuo. La teoría de la manipulación de símbolos –por incursionar en problemas infinitos– es tan libre de contradicción como lo sea la teoría de los números naturales. Tiene *la apariencia* de no ser contradictoria.

Finalmente, la lógica binaria y la lógica dialéctica, por ser parte de la matemática discreta, tiene ejemplos finitos –muy simples– que cumplen con sus axiomas.

Independientemente del reticulado y de la negación considerada, se pueden construir enunciados que son siempre una tesis. Éste es un resultado sorprendente de la lógica dialéctica, ver el Teorema 72.

La contradicción en la matemática

En las ciencias formales la contradicción desempeña un papel crítico. La contradicción es inaceptable, se la emplea como un método de demostración. Por esta razón comenzaremos por el *principio de contradicción*, también llamado *principio de explosión*.

Su enunciado latino clásico es *ex contradictione quodlibet* (de una contradicción, lo que quieras) es conocido desde la lógica escolástica.[162] Henri Poincaré, en su crítica a la formalización de la lógica, hace este comentario:

> *M. B. Russell arrive à cette conclusion qu'une proposition fausse quelconque implique toutes les autres propositions vrais ou fausses.* [. . .] *Il suffit cependant d'avoir corrigé une mauvaise thèse de mathématiques, pour reconnaître combien M. Russell a vu juste. Le candidat se donne souvent beaucoup de mal pour trouver la première équation fausse; mais dès qu'il l'a obtenue, ce n'est plus qu'un jeu pour lui d'accumuler*

[162] Algunos autores sugieren que se remonta a Aristoteles, cosa que es discutible. Desde comienzos del siglo 20, al formalizarse la lógica binaria, surgió una corriente de lógicos que exploraron los alcances de esta idea y construyeron lo que llamaron *lógica paraconsistente* (más allá de lo consistente). Esta denominación fue introducida en 1976 por el filósofo peruano Francisco Miró Quesada (1918).

> *les résultats les plus surprenants, dont quelques–uns même peuvent être exacts.*[163] [77, IV, i]

Sin embargo hay motivos para pensar que Poincaré dejaba de lado algo muy importante. Un ejemplo nos puede mostrar esto. La ecuación 1 = 3 es claramente una de esas "ecuaciones falsas" de las cuales parece no salir nada.[164] ¿Qué sucede si continuamos con el "error". Aplicando las reglas de la aritmética de números enteros resulta que 0 = 2, o que 4 = 2 = 0 y así sucesivamente. Estos "errores" se llaman *aritmética binaria* o *aritmética de base 2* –el fundamento técnico que emplean las computadoras– y la matemática los convierte en sólidas verdades con un agregado ínfimo. Escriben simplemente $1 \equiv 3 \ (mod\ 2)$.

El *quodlibet* se ha convertido en la aritmética módulo m, indispensable para estudiar muchos aspectos de la matemática. Ya hemos empleado esta aritmética para definir genéricamente a los reticulados dialécticos. Esta nueva estructura permite, inclusive, definir cuerpos numéricos finitos de propiedades muy importantes en diferentes campos de la matemática y la ciencia.

Desde el punto de vista de las propiedades formales es posible "demostrar" este singular principio de contradicción. Un ejemplos de la demostración es empleando el llamado *silogismo disyuntivo*: si $(x + y)$

---

[163] B. Russell llega a la conclusión que una proposición falsa cualquiera implica todas las otras proposiciones, verdaderas o falsas. [. . .] Basta haber corregido una mala tesis de matemática para reconocer que el punto de vista de Russell es exacto. El candidato se toma bastante trabajo para encontrar una primera ecuación falsa. Pero, desde el momento que la obtiene, es un juego sencillo acumular los resultados más sorprendentes, algunos de los cuales pueden ser exactos.

[164] También es el enunciado de la trinidad cristiana, puesto en un lenguaje matemático imaginativo. Birkhoff [4, XII, 6] cita esta anécdota de Russell. *Russell is reputed to have been challenged to prove that the (false) hypothesis 2 + 2 = 5 implied that he was the Pope. Russell replied as follows: "You admit 2 + 2 = 5; but I can prove 2 + 2 = 4; therefore 5 = 4. Taking away from both sides, we have 3 = 2; taken one more, 2 = 1. But you will admit that I and the Pope are two. Therefore, I and the Pope are one. q. e. d."* (Se dice que Russell fue desafiado a probar que de la (falsa) hipótesis 2 + 2 = 5 se deducía que él era el papa. Russell razonó así: "Usted admite que 2 + 2 = 5; pero yo puedo demostrar que 2 + 2 = 4; entonces 4 = 5. Restando de los lados tenemos 3 = 2; restando una vez más, 2 = 1. Pero usted admitirá que el papa y yo somos dos. Luego, el papa y yo somos uno. LQQD.")

y Nx son tesis, luego y es una tesis. La dificultad reside en que el *silogismo disyuntivo* es falso en la dialéctica. El contraejemplo es muy simple: $a + 0$ es una tesis, Na también, pero 0 no es una tesis. Otra posible "demostración" se basa en MTE:

1)	$a \,.\, Na$	hipótesis de partida
2)	a	EC en 1)
3)	Na	EC en 1)
4)	Nb	hipótesis
5)	a	reiteración de 2)
6)	$Nb \Rightarrow a$	conclusión de 4) y 5)
7)	$Na \Rightarrow NNb$	MTE de 6)
8)	NNb	MP de 3) y 7)
9)	b	PNN de 7)
10)	$(a \,.\, Na) \Rightarrow b$	conclusión de 1) y 9).

Esta demostración no dice nada nuevo y es formalmente defectuosa. En el caso de una negación –como N_0 en **2Dn** o **3Dn** y presumiblemente en los reticulados de rango mayor– para un átomo a ocurre $a \Rightarrow a$ y $a \Rightarrow N_1\, a$ puesto que $N_1\, a = A$. Si la demostración anterior *fuese correcta*, se deduce que $a \Rightarrow b$ debiera ser una consecuencia de 2) y 9). Sin embargo resulta que la tabla de verdad –ver los Cuadros 33, 34 o 35– indica que es falso. O sea, en la lógica dialéctica se encuentra un contraejemplo que muestra que la demostración formal es falsa.

Por otra parte, $(a \,.\, Na) \Rightarrow b$, si la negación es estricta, no dice otra cosa que $0 \Rightarrow x$ es una tesis. Esto es cierto para $x = 0, d, 1$ porque $f_1 > 0$ y porque tanto $0 \Rightarrow 0$ como $0 \Rightarrow 1$ también son tesis. Este punto se analiza más adelante en toda su complejidad, junto con la validez de la regla IC.

La demostración de que no existe un número (racional) tal que elevado al cuadrado sea 2 no destruyó la matemática sino que la expandió y creó los números "irracionales". Del mismo modo la imposibilidad de que el cuadrado un número (real) elevado al cuadrado sea –1 llevó a la creación de los números "imaginarios". La terminología usada en la matemática –irracional o imaginario– implícitamente reconoce que han nacido de una contradicción.

Las dificultades con un operador hamiltoniano llevaron a Paul Dirac (1902, 1984) a concebir la idea de "antipartícula" que fue descubierta poco tiempo después. También conserva un nombre que recuerda la contradicción original. Por cierto, no fue la única contradicción que introdujo en las ciencias.[165]

Estos ejemplos nos muestran el cuidado con el que hay que manejar la noción de contradicción, aún en las ciencias exactas y formales. Lejos de ser un escollo, en muchos casos la contradicción ha sido fuente para la generación de nuevos conocimientos.

El axioma de las paralelas en la geometría

El examen de la historia de la matemática y la ciencia muestran aspectos de aplicación de la función implicación dialéctica. Comencemos por la geometría clásica de los griegos. Es claro que la secuencia de los acontecimientos históricos fue así:

1. Hacia el –500 Thales de Mileto descubrió las propiedades de los triángulos semejantes.

2. También hacia el –500 Pithagoras descubrió el teorema de la hipotenusa del triángulo rectángulo.

3. Otros matemáticos no identificados, entre el –500 y el –300 descubrieron diversos resultados vinculados con los dos grandes teoremas anteriores.

4. Hacia el –350 Aristoteles de Megara realizó la primera formalización del razonamiento deductivo.

5. Hacia el –300 Euklides descubrió la noción de axioma y construyó una teoría deductiva de la geometría y, por extensión, de la matemática.

[165] Otro ejemplo muy conocido es la "función" $\delta(x)$ de Dirac, algo que contradecía todas las definiciones anteriores de función. Esta "función" ya había sido sugerida por Oliver Heaviside (1850, 1925) en 1894 y por Poincaré en 1912. Fue formalizada posteriormente por Laurent Schwartz (1915, 2002) en su teoría de distribuciones.

6. Durante 20 siglos se dudó del carácter de axioma del enunciado de Euklides sobre las paralelas.

7. En el siglo 19 se demostró que el axioma de las paralelas es independiente de los demás axiomas clásicos de la geometría.

8. Hacia mitad del siglo 19 y comienzos del siglo 20 –desde Boole hasta Russell– se formalizó la teoría de la deducción lógica.

Analicemos esta historia desde el punto de la validez lógica de las proposiciones de la geometría. Hacia –500 los dos teoremas fundamentales poseían un valor lógico relativo, se basaban en observaciones y propiedades de los triángulos pero estaban poco fundamentadas. Podríamos decir que su valor lógico era *tesis*. En la obra de Euklides ocurrió un cambio fundamental: se introdujeron los axiomas, proposiciones *que se les asignó* el valor lógico *verdadero*.[166] Con esta modificación, los teoremas pasaron a ser también afirmaciones con valor "verdadero", o sea, tienen *el mismo valor lógico que los axiomas que los originan*.

El hecho que el axioma de las paralelas ofreciera dudas, no cambiaba su valor lógico, también era "verdadero", solamente se especulaba con que fuese un teorema. En el siglo 19 se resolvió la cuestión de las paralelas de una manera inesperada y muy importante desde el punto de vista dialéctico. Por un lado János Bolyai (1802, 1860) y Nikolai Lobachevsky (1792, 1850) publicaron, por separado, tratados de geometría que postulaban la existencia de más de una paralela. Un par de décadas después Bernhard Riemann (1826, 1866) presentaba la geometría sin paralelas. A partir de este momento coexistían tres variantes de la geometría según el axioma aceptado.[167]

[166] No es que los axiomas sean "verdaderos" en un sentido epistemológico, es simplemente *convencional* aceptar que son universalmente válidos como se ve en lo que sigue.
[167] Existe al menos una cuarta variante de la geometría, la llamada *geometría proyectiva*, una geometría sin paralelas derivada del estudio de la perspectiva. Esta geometría puede ser interpretada en términos de la geometría euclidiana aceptando la existencia de puntos, rectas o planos al infinito. De esta manera se obtenía una geometría coherente que además tenía la peculiaridad de que los conceptos de punto y plano eran intercambiables.

La aceptación de diferentes axiomas de las paralelas permite construir geometrías que tienen *el mismo valor lógico que el axioma aceptado*. Las tres variantes del axioma son contrarias entre sí pero simultáneamente existentes. Es algo que se armoniza perfectamente con el reticulado **D3** de Hegel. Así por ejemplo, si "no existe una paralela" podemos aceptar que posee valor *tesis*, "existe una única paralela", que posee valor *antítesis* y "existe más de una paralela", que posee valor *síntesis*.[168] Así, el panorama de la geometría del siglo 19 se presenta perfectamente coherente. Los teoremas de la *geometría elíptica* poseen todos valor a en **D3**; los de la *geometría euclidiana*, valor b y los de la *geometría hiperbólica*, valor c. Son teoremas contradictorios entre sí, pero en el marco de la interpretación dialéctica, forman *una única geometría*.

Con el descubrimiento de las geometrías no–euclidianas el axioma de las paralelas pasó a ser una *opción*, se puede aceptar o no según se desee. Una vez aceptado con el valor "verdadero", cualquiera sea el enunciado de los tres casos posibles –ausencia de las paralelas, existencia de una única paralela, existencia de múltiples paralelas–, se construye una geometría válida y útil para comprender el universo.

La implicación dialéctica permite comprender la existencia de teorías deductivas que son contradictorias pero válidas al mismo tiempo. El caso paradigmático lo suministran las geometrías no euclidianas. Tal como se ha propuesto, la existencia simultánea de las tres geometrías (o más, ver [75, III]) puede ser analizada sin dificultades en el reticulado **D3** o superior. Consideremos a la geometría euclidiana como un sistema deductivo donde sus enunciados poseen solamente el subconjunto de los valores lógicos $S_1 = (a, 1)$, un *cono* de **D3**, ver Definición 14. Reservamos los valores $S_2 = (b, 1)$ y $S_3 = (c, 1)$ –ambos conos de **D3**– para las geometrías elípticas e hiperbólicas.

Más aún, para estos sistemas lógicos son válidas todas las propiedades formales de la implicación, incluyendo la propiedad IC de la implicación puesto que, por ejemplo, tanto $a \,.\, a$ como $a \,.\, 1$ o $1 \,.\, 1$ son tesis y también lo son a y 1. Por la propiedad PM, el principio de mezcla,

[168] Esta asignación de valores lógicos no corresponde a la sucesión histórica de los acontecimientos pero es más coherente decir que una única paralela es la síntesis entre la no existencia y la existencia múltiple.

de la implicación cada una de estas teorías es perfectamente coherente puesto que los valores dialécticos no se mezclan. En forma adicional, las propiedades de la lógica de predicados también valen puestos que las propiedades de los cuantificadores clásicos son válidas en un cono. De acuerdo con esto todo sucede entre los valores dialécticos tal como si ocurriese en la lógica formal binaria. Esta situación suministra una importante pista semántica sobre el empleo de la lógica dialéctica en las ciencias.

La construcción de teoremas a partir de los axiomas –todos los axiomas valen 1 menos el axioma de las paralelas que pueden valer a, b, c según se elija, supongamos que se elige el valor a– hace que los teoremas –la suma de los ángulos de un triángulo, por ejemplo– posean valores de S_1. De esta manera se establece la validez lógica de la geometría euclidiana. Otro tanto ocurre con la geometría elíptica y con la geometría hiperbólica. No es necesario cambiar ningún teorema ni ninguna demostración en cada teoría.

De esta manera la construcción de teoremas puede continuar sin que ocurra una contradicción. Todos los teoremas de las tres geometrías son simultáneamente válidos. Por extensión, se debe concluir que son contradicciones tales $a \Rightarrow b = 0$ como $a \Rightarrow c = 0$. De esta manera cada teoría geométrica puede desarrollarse aplicando todas las reglas formales sin advertir que algunos teoremas valen a, b, c y otros valen 1. Éste es un punto esencial como consecuencia de las propiedades de las funciones implicación.

El ejemplo de las tres (o más) geometrías sirve de *modelo general* para analizar en resto de las ciencias, formales, naturales o sociales. Permite ver la razón por la cual se pueden aceptar teorías contradictorias entre sí, sin que esto implique una violación de las reglas formales. Por esta razón se lo ha analizado en detalle desde el punto de vista dialéctico.

La dialéctica en la matemática

La matemática no escapó al problema general de la geometría. El desarrollo del álgebra nos muestra una historia similar. El concepto matemático de "grupo" fue desarrollado a lo largo del siglo 19. ¿Qué vinculación poseía la teoría de grupos con el resto de la matemática "tradicional"? La teoría en sí es axiomática y deductiva, tal como proponía el modelo euclidiano, pero sin embargo no se puede decir que los axiomas de la teoría sean "verdaderos". Son realmente *tesis* que se aplican o no a los objetos de estudio. Hay colecciones de objetos que son grupos y hay otras que no lo son. Lo mismo ocurre con todas las estructuras algebraicas introducidas desde el siglo 19 en adelante, incluyendo dentro de estas estructuras el álgebra de Boole y la teoría de reticulados.

La lógica "tradicional", aristotélica, formalizada hacia 1900, ¿es verdadera? La respuesta es no, es solamente un conjunto de *tesis* que se aceptan habitualmente, pero que no es obligatorio aceptar. La existencia de una lógica más poderosa que la binarias es el tema del presente estudio.

Lo mismo sucede con el célebre resultado de Kurt Gödel (1906, 1978). Es un caso paradigmático para estudiar la vinculación de las teorías formales con la interpretación dialéctica del pensamiento. Este caso es el más alambicado esfuerzo de los lógicos por ignorar las limitaciones de la lógica binaria para comprender la matemática y las teorías formales suficientemente ricas como para contener a la aritmética.

El resultado de Gödel es uno de estos casos especiales en el cual se juntan cadenas formales de argumentos que llevan a un resultado difícil de interpretar. En su planteo original se procedió de esta manera, ver [29]:

- Se fabrica un aparato aritmético que permite expresar enunciados lógicos y enunciados matemáticos como números.
- Se demuestra la existencia de funciones aritméticas que indican si una proposición es demostrable.
- Se construye una proposición (muy compleja), que llamaremos G, cuyas propiedades se estudian.
- Se *demuestran* dos proposiciones: $G \Rightarrow \neg G$ y $\neg G \Rightarrow G$.
- Se concluye de aquí que o bien la aritmética es *inconsistente* o bien existen proposiciones *no demostrables*, como G. Éste es el punto que debe ser interpretado en forma dialéctica.

En la lógica binaria se recurre a la proposición $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ –que ha sido elegido por Frege como un axioma de la lógica y que es reconocida como el principio de contradicción PC– y se argumenta que a partir de esta proposición toda proposición es válida. En la lógica dialéctica esto no es así. Es claro que que una proposición puede tomar el valor *tesis* y que su negación puede tomar, entonces, el valor *antítesis* sin que nada grave ocurra.

Examinemos entonces el problema de Gödel en términos dialécticos. Gödel demuestra –mediante cadenas formales deductivas de razonamientos– las dos proposiciones mencionadas. Estas dos proposiciones nos dicen, razonando por absurdo, que tanto G como la *negación* de G son, de algún modo, verdaderas lo cual nos indica que poseen un valor intermedio entre "verdadero" y "falso", lo que hemos llamado un *valor dialéctico*. En definitiva, la tesis de Gödel indica que *en todo sistema axiomático*, con suficiente amplitud como para contener la aritmética, *se pueden construir proposiciones dialécticas a pesar de intentar fabricar solamente verdades estrictas.* En otras palabras, que es posible construir razonamientos que violan el principio de mezcla PM, algo que no lesiona para nada los resultados de la dialéctica.

El resultado de Gödel formalmente no se puede simbolizar como $1 \Rightarrow a$ donde a es un valor dialéctico porque esto no es posible para la implicación dialéctica. Se puede simbolizar, en cambio como $N\,G \Rightarrow G$ implica que $G = a$ o sea, la matemática permite crear una enunciado *no decidible* que solamente se puede interpretar como un valor dialéctico.

Si se procediera como fue habitual en la matemática en la historia al encontrar una contradicción se agregaría G como un nuevo axioma de la aritmética. Sin embargo, es posible conjeturar que el propio teorema de Gödel, aplicado a esta nueva situación, conduciría a otro enunciado del tipo $N\,G_1 \Rightarrow G_1$ y así sucesivamente.

El descubrimiento de Gödel no es un caso aislado en la matemática. Se conocen otros casos, pero no son espectaculares como éste, ni siquiera son reconocidos como problemas dialécticos.

Un problema similar lo plantean las proposiciones que hacen referencia a propiedades matemáticas todavía no conocidas. Pensemos, a titulo de ejemplo, en la conjetura de Christian Golbach (1690, 1794) formulada en 1742 –todo número par es la suma de dos primos– o la simple afirmación que en el desarrollo decimal de π exista 100 veces seguidas, por ejemplo, el dígito 8. A partir de una proposición no conocida se pueden realizar especulaciones sumamente interesantes las cuales se encuentran dentro del ámbito de la dialéctica.

Es interesante ilustrar estos problemas con un ejemplo matemático muy simple. Consideremos el problema clásico: demostrar que un número irracional elevado a otro irracional puede dar un resultado racional. Existe una demostración –no aceptada por los *matemáticos constructivos*– que se encuentra en el ámbito de la dialéctica. Consideremos las proposiciones:

p: existen dos números irracionales x, y que cumplen que x^y es racional.

q: a^a es un número racional, donde $a = \sqrt{2}$.

Por el momento ignoremos el valor lógico de las proposiciones p y q. Es inmediato que es una tesis $q \Rightarrow p$ puesto que si q es una tesis, el teorema que se intenta demostrar también es una tesis. Pero también es una tesis $N\,q \Rightarrow p$ puesto que si a^a fuese irracional, entonces $(a^a)^a = a^2 = 2$ y también se pueden encontrar dos irracionales en las condiciones pedidas. De $q \Rightarrow p$, $N\,q \Rightarrow p$ son tesis sigue que p es una tesis.

El razonamiento espontáneo dice que: o bien se cumple q y entonces p es verdadero, o bien se cumple $N\,q$ y también p es verdadero. Sin embargo no es tan simple deducir este resultado de las reglas formales. Un razonamiento posible sería así: 1) $q \Rightarrow p$; 2) $N\,q \Rightarrow p$; 3) $N\,p \Rightarrow NN\,q$ por MTE en 2); 4) $N\,p \Rightarrow q$ por PNN en 3);[169] 5) $N\,p \Rightarrow p$ por T en 1) y 4); 6) $NN\,p$ por PC en 5); 7) p por PNN en 6). Este razonamiento muestra que, desde el punto de vista formal, no es necesario suponer que las alternativas para q son verdadero o falso.

[169] Este paso no es tan inmediato según las reglas formales. Ocurre así: 3) $N\,p \Rightarrow NN\,q$ por MTE en 2); 3a) $N\,p$ como hipótesis de apertura de un razonamiento subordinado; 3b) $N\,p \Rightarrow NN\,q$ por copia de 3) en el razonamiento subordinado. 3c) $NN\,q$ por MP en 3a) y 3b); 3d) q por PNN en 3c); 4) $N\,p \Rightarrow q$ por la introducción de la implicación y fin del esquema subordinado.

También demuestra que p es una tesis en la dialéctica porque cumple con la reglas formales de la implicación. No se puede demostrar que el teorema es *verdadero* sino que es una tesis en sentido dialéctico. En el fondo, la aplicación de un razonamiento según las reglas hace que se obtenga un resultado más débil que los usuales en la matemática. En este sentido los matemáticos constructivistas tienen razón. No tienen razón, en cambio, en disputar la validez del teorema.

Como último caso, consideremos la conjetura de Pierre de Fermat (1607, 1665): no existe solución de la ecuación $x^n + y^n = z^n$ para $n > 2$, donde x, y, z son números enteros. La primera demostración de esta conjetura ocurrió recién en 1994 por Andrew Wiles (1953) y ocupaba 150 páginas que incursionaban en muy diversas áreas de la matemática. Durante 358 años no se sabía el carácter de esta conjetura y aún hoy, vista la complejidad necesaria para la demostración, cabe preguntarse si hay una demostración que no salga del ámbito de los números naturales donde está planteada.

Estos resultados ilustran las nuevas posibilidades de análisis que suministra la dialéctica para algunos problemas matemáticos clásicos. En otras palabras, la matemática exige una lógica más compleja que la binaria. Es plausible que solamente la dialéctica sea capaz de comprender la matemática del presente porque ha ocurrido un salto en calidad.[170]

La dialéctica en la informática

La informática presenta varios casos que posiblemente exigen un tratamiento dialéctico. Sin ánimo de armar una lista completa, mencionamos:

- el teorema de Halting,
- la doble definición de número real,
- los problemas NP completos.

[170] José Luis Massera [63, 64] mostró que la noción de “rigor” en la matemática es una noción que ha cambiado a lo largo de la historia. En este punto basa su defensa del carácter dialéctico de la matemática. Creo que el problema va más allá de esta idea propuesta, que es claramente verdadera.

El teorema de Halting de Alan Turing (1912, 1954) establece los límites de acción de una máquina que manipula símbolos. Este teorema se basa en la construcción de una contradicción y, por lo tanto, bajo un análisis dialéctico sus conclusiones podrían ser diferentes.

En la matemática existe una doble definición para los números reales. Por un lado está la clásica definición de Richard Dedekind (1831, 1916) mediante cortaduras[171] y por otro lado la definición usada por Georg Cantor (1845, 1918) como una sucesión infinita de dígitos decimales luego de la coma decimal. La equivalencia entre estas dos definiciones es más que dudosa y posiblemente exista aquí un problema dialéctico.

La complejidad computacional de los algoritmos que dependen de un parámetro n permite clasificarlos en dos grupos, los que su complejidad de cálculo aumenta como un polinomio en n –por ejemplo, calcular las n cifras decimales de la raíz cuadrada de un número entero– y aquellos problemas que son más complejos y que su cálculo aumenta en forma No–Polinómica (NP) con n –por ejemplo hallar el camino óptimo entre dos puntos de una red de carreteras que posee n puntos de cruce–. Los problemas NP conocidos son equivalentes entre sí, pero no se ha demostrado realmente que sean no–polinómicos. Aquí puede existir también un problema que conduzca a un planteo dialéctico.

Introducción a la dialéctica en las ciencias naturales

Las ciencias naturales son, por su naturaleza epistemológica, *experimentales*.[172] En cierto punto de su desarrollo estas ciencias terminan

[171] La cortadura es una clasificación de los números racionales en dos clases. El punto débil de esta definición –que puso de manifiesto la obra de Turing– es que se necesita un *procedimiento preciso* –esto es, un algoritmo– para saber si un número está en una clase u otra. Este punto de vista hace que los únicos números reales sean los *números computables* de Turing.

[172] Esto debe entenderse en un sentido amplio. Así por ejemplo, ni la geología, ni la astronomía, ni la historia, pueden verdaderamente realizar experimentos. Eso sí, pueden realizar observaciones experimentales, tomar medidas y, en una pequeña medida, realizar experimentos. Medir la velocidad de depósitos de un aluvión o la cantidad de sal que aportan los ríos, enviar sondas espaciales para tomar fotografías, muestras o análisis de cuerpos celestes, son –en cierta medida– experimentos. La formación de la URSS, las cooperativas y otros casos similares, puede ser considerados formas de expe-

por admitir una formulación semejante a la matemática: a partir de unos pocos principios se construye una teoría deductiva, esencialmente cuantitativa. Esto no cambia el carácter experimental, la exposición analítica es solamente una manera de presentar los resultados. En todo momento un experimento o una observación puede controvertir estas teorías y provocar una revisión completa de sus resultados.

Henri Poincaré decía, con esa clara visión que poseía para la filosofía de la ciencia:

> *Les Anglais enseignent la mécanique comme une science expérimentale ; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme une science déductive et* a priori. *Ce sont les Anglais qui ont raison, cela va sans dire* [. . .][173] [75, VI]

Se plantea aquí la doble exposición que admiten las ciencias naturales en su fase avanzada. Más allá de las preferencias de Poincaré –que son perfectamente compartibles– cabe la pregunta ¿en qué se diferencian estas dos maneras de exponer las ciencias experimentales?

La respuesta está lejos de ser trivial y es uno de los temas que se analizan en este capítulo. Como introducción al tema puede servirnos el análisis de la gravitación de Newton. Se cumple en este caso –como ocurre en todas las ciencias que alcanzan el nivel de la formación– la dualidad de criterios que señalaba Poincaré: la posibilidad de formularlas en forma *argumentativa* basada en resultados observacionales o experimentales o la posibilidad de formularla en forma *axiomática* a partir de un conjunto reducido de ecuaciones que funcionan como axiomas.

En la página 170 se presenta la ecuación de argumentación experimental de la gravitación. Por el contrario, a partir de tres "axiomas" –las dos leyes del movimiento, ver página 242 (Mov.) y la ley de gravita-

---

rimentación social o histórica, así como en el pasado sucedieron otros experimentos sociales como la reforma religiosa de Ajeniten en el Egipto faraónico, por ejemplo. En este sentido también la historia puede considerarse (algo) experimental.

[173] Los ingleses enseñan la mecánica como una ciencia experimental; en Europa continental se la presenta, más o menos, como una ciencia deductiva y *a priori*. Los ingleses tienen razón, de más está decirlo [. . .]

ción (G)– se pueden *deducir* las leyes experimentales de Galilei, Kepler y la observación del cometa de Flamsteed.

En conclusión, Poincaré tiene razón en el hecho que hay dos maneras de formular la mecánica, no la tiene en decir que que una de las formulaciones es preferible a la otra.[174] Como veremos en lo que sigue, esta situación es general en todas las ramas de la ciencia.

Introducción a las relaciones entre teorías físicas

Werner Heisenberg (1901, 1976) en [44, IV] clasificaba las teorías físicas –en el estado que se encontraban en la mitad del siglo 20– en cuatro grandes ramas:

F1 La mecánica de Newton.

F2 La termodinámica y la mecánica estadística.

F3 Electricidad, magnetismo, teoría del campo, relatividad.

F4 Física cuántica.

A continuación establecía las siguientes relaciones de dependencia: F1 $\subset$ F3 si c –la velocidad de las ondas electromagnéticas– es infinita, F1 $\subset$ F4 si h –la constante de Planck– es despreciable. No establece una relación para F2. Finalmente, se planteaba la interrogante si existe una teoría F –llamada desde siempre “teoría unificada”– que comprendiera a todas las ramas de la física (y de la química). Esta aspiración –aumentada en complejidad por los sucesivos descubrimientos en F4– todavía continúa en el imaginario de los físicos.

Para analizar estos problemas estudiaremos, como caso paradigmático, a la mecánica y las ramas de la física que terminan siendo asociadas a ella. La mecánica se ocupa de la materia y de su movimiento, constituye el corazón de toda la física y la química. Por esta razón es un buen ejemplo para analizar el papel de la lógica dialéctica en las estructuras científicas. Es razonable suponer que las demás ciencias, a medida que se convierten en cuantitativas y permitan una formulación deductiva, enfrenten problemas estructurales similares.

[174] Es posible que la desconfianza en las formalizaciones tiene su origen en la desconfianza que le provocaba la formalización de la lógica binaria. Si esta exposición de la dialéctica es acertada, también en este aspecto Poincaré tenía razón.

La mecánica del siglo 19

Hacia fines del siglo 17 Newton presentó la mecánica en forma axiomática. Comenzó con dos definiciones básicas y un agregado:

- *Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate et Magnitudine conjunctim.*[175] [66, 67, I, *Definitiones*, i].
- *Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materiæ conjunctim.*[176] [66, 67, I, *Definitiones*, ii].
- *Tempus absolutum verum et Mathematicum* [...] *Spatium absolutum natura sua absq; relatione ad externum quodvis semper manet similare et inmmobile* [...][177] [66, 67, I, *Definitiones, Scholium*].

Las leyes del movimiento son dos –Newton enuncia tres, pero la primera está contenida en la segunda– y son:

- *Mutationem motus propotionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*[178] [66, 67, I, *Axiomata sirve leges motus*, ii].
- *Actioni contrariam semper et æquales esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.* [179] [66, 67, I, *Axiomata sive leges motus*, iii].[180]

De las leyes del movimiento resulta el clásico enunciado:

$$\frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = \vec{F}$$

[175] La cantidad de *materia* es la medida que resulta de la combinación de la densidad y del tamaño.

[176] La cantidad de *movimiento* es la medida que resulta de la velocidad y la cantidad de materia.

[177] El *tiempo* es absoluto, verdadero y matemático [...] El *espacio* es absoluto en su naturaleza, sin relación con algo externo y permanece siempre igual e inmutable [...]

[178] El *cambio de movimiento* es proporcional a la fuerza aplicada y ocurre según la dirección y el sentido de la recta sobre la cual se aplica la fuerza.

[179] La *acción* siempre es contraria e igual a la *reacción*: la acción mutua de dos cuerpos, cada una sobre el otro, son siempre iguales y dirigidas en sentidos contrarios.

[180] Es difícil no ver en la ley de acción y reacción un enunciado dialéctico de unidad y lucha de los contrarios, algo que confirma el carácter dialéctico de los *Principia*.

que permite analizar los proyectiles, los planetas y hasta los sistemas de masa variable como un cohete. A partir de esta célebre ecuación, durante los siglos 18 y 19 se avanzó enormemente en el conocimiento del movimiento de la materia (Mat. en forma abreviada) y en una nueva formulación axiomática.

En la mecánica en el siglo 19 se construyen dos formulaciones nuevas de la teoría del movimiento: la ecuaciones de Joseph–Louis Lagrange (1736, 1813) y las ecuaciones de William R. Hamilton (1805, 1865). Estas ecuaciones eran menos generales que el enunciado de Newton pero tuvieron una importancia decisiva para la mecánica del siglo 20.

La exposición de la mecánica de Lagrange se basa en la función $L(q, \dot{q}, t)$ –llamada función de Lagrange– donde $q, \dot{q}, t$ son respectivamente las coordenadas, las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas de los puntos materiales de un sistema y el tiempo. Esta función cumplía los siguientes axiomas:[181]

1. Si un sistema está formado por dos sub–sistemas, A, B, que no interacciones entre sí, entonces la función de Lagrange del sistema total es $L = L_A + L_B$.

2. El movimiento del sistema entre q_1 y q_s hace mínima la integral de *acción* $\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$.

3. La función de Lagrange de un sistema de puntos que interactúan entre sí está dado por $L = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q)\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j - U(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, t)$ donde $\vec{r_i}$ es el vector posición del punto i.

4. El sistema de referencia básico para la mecánica –*principio de relatividad* de Galilei– es homogéneo en el espacio y el tiempo.[182]

[181] Hay muchas formulaciones de esta mecánica, dentro de ellas es preferible seguir la exposición de Lev Landau en la serie sobre física teórica escrita junto con Evgeny Lifchitz [51]. Esta exposición, además de ser axiomática, proviene de un premio Nobel y un físico materialista, dos condiciones apropiadas para su elección.

[182] En rigor, este principio fue precisado por Newton y se encuentra descrito en [66, 67, I, Definitiones, Scolium].

La diferencia esencial entre la mecánica de Newton y la mecánica de Lagrange –y otras teorías derivadas– es la independencia de la interacción U con las velocidades $\dot{q}_i$. Esto ocurre con el rozamiento en el aire o en un líquido, por ejemplo.[183] También ocurre con las fuerzas magnéticas.

De las ecuaciones de Lagrange deriva otra forma de escribir las ecuaciones de movimiento de los sistemas, las ecuaciones de Hamilton. Esta presentación es importante para el desarrollo de la mecánica cuántica y se encuentra en [51, VII, 40]. En esencia consiste en un cambio de variables en los cuales se reemplazan las velocidades generalizadas $\dot{q}$ por los impulsos generalizados p y la función de Lagrange por la función H de Hamilton, definidos como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad H = \sum p_i \, \dot{q}_i - L.$$

H es la energía del sistema como se puede demostrar fácilmente. De este cambio de variables resultan las dos ecuaciones canónicas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

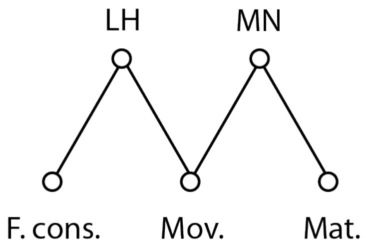


Figura 30: Diagrama argumentativo en la mecánica del siglo 19.

En las Figuras 30 y 31 se presentan las relaciones lógicas entre las diferentes formulaciones de la mecánica. En forma *argumentativa*, la mecánica de Newton (MN) se basa en las leyes del movimiento (Mov.)

[183] Landau llega a decir: *le problème du movement d'un corps dans un milieu n'est plus una problème de Mécanique* (el problema de movimiento de un cuerpo en un medio [material] no es un problema de mecánica) [51, V, 25].

y en las propiedades de la materia (Mat.). Por el contrario, las ecuaciones de Lagrange–Hamilton (LH) se basan en la existencia de fuerzas conservativas (F. cons.) o que derivan de un potencial. No estudian el caso general en donde las fuerzas pueden depender de la velocidad o disipar energía.

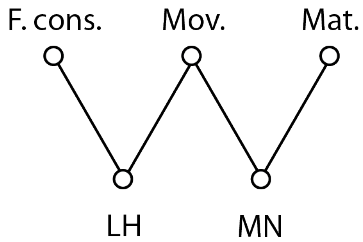


Figura 31: Diagrama axiomático en la mecánica del siglo 19.

Las relaciones lógicas son inmediatas. En el fragmento del reticulado de la Figura 30 la relación de orden significa mayor valor lógico o mayor valor explicativo. A su vez, lo único que poseen en común LH y MN son las ecuaciones de movimiento de Newton (Mov.). Una observación es inmediata. Se ha representado –solamente un fragmento de un reticulado– tanto LH como MN son de mayor nivel lógico que F. cons., Mov y Mat. Parece natural que sea así.

Esta representación tiene una interpretación dialéctica inmediata, por ejemplo en **2Dn**. Si consideramos los valores lógicos F. cons., Mov., Mat., LH, MN, 1, entonces en el cono $S_1 = (F.cons., LH, \ldots, 1)$ se puede *argumentar* la teoría –igual que en el caso de las geometrías no-euclideanas– de Lagrange–Hamilton. También en el cono $S_2 = (Mov., Mat., MN, \ldots, 1)$ se puede argumentar la mecánica de Newton basadas en los "axiomas" F. cons., Mov. y Mat. Los teoremas matemáticos necesarios poseen valor lógico 1 y son aceptados como verdades absolutas. *En forma dual*, invirtiendo la figura,[184] las teorías se basan en los "axiomas" LH y MN y a partir de ellos, aplicando todo el formalismo lógico, se demuestran las leyes de la materia, el movimiento y las fuerzas conservativas. Los puntos suspensivos en la definición de

[184] La razón para considerar el reticulado invertido se encuentra esencialmente en las leyes del movimiento, Mov., que son consecuencia tanto de LH como de MN, dos teorías "contrarias".

los conos permiten la posibilidad de que existen teorías de valor lógico superior, todavía no desarrolladas.

¿Qué ventaja tiene la formulación dialéctica? Varias. Para comenzar, se establece una jerarquía de los niveles lógicos de cada sector del conocimiento. En segundo lugar, al no incluir el valor 1 en los fragmentos de los reticulados,[185] queda claro que ninguna teoría tiene pretensiones de ser absolutamente verdadera, algo que deja abierta la posibilidad de expandir el conocimiento hacia niveles lógicos mayores, tal como se ve en lo que sigue.

La mecánica del siglo 20

A comienzos del siglo 20 la mecánica experimentó dos grandes revoluciones: la mecánica relativista y la mecánica cuántica. Estas dos ramas de la física derivan de la mecánica del siglo 19, del electromagnetismo y del conocimiento de la estructura de la materia.

La mecánica relativista se originó en una incompatibilidad entre el movimiento relativo y el electromagnetistmo (EM).[186] En las ecuaciones de James Clerk Maxwell (1831, 1879) la velocidad de las ondas electromagnéticas es una constante universal –algo que fue comprobado experimentalmente por Edward Morley (1838, 1923) y Albert Michelson (1852, 1931) en 1887– en contra de la composición de velocidades de Galilei y Newton.

En 1905 Albert Einstein (1879, 1955) [82] propuso una nueva ecuación de transformación para el movimiento relativo que tenía en cuenta la constancia de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. Estas ecuaciones, conocidas como la relatividad restringi-

[185] Esto no es estrictamente cierto. En los desarrollos formales intervienen teoremas matemáticos que poseen valor 1 según lo universalmente aceptado. En realidad están *implícitos* en los diagramas parciales de los reticulados.

[186] Consideremos una carga eléctrica homogénea distribuida según una recta indefinida. Un observador en reposo con la recta detecta solamente un campo eléctrico. Un observador, que se desplaza con una velocidad constante paralela a la recta cargada, observa, además de un campo eléctrico, un campo magnético porque la carga –que observa en movimiento– forma una corriente eléctrica que crea este campo. En definitiva, no se cumple el principio de relatividad de Newton. Por esta razón el trabajo de Einstein se titula *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento).

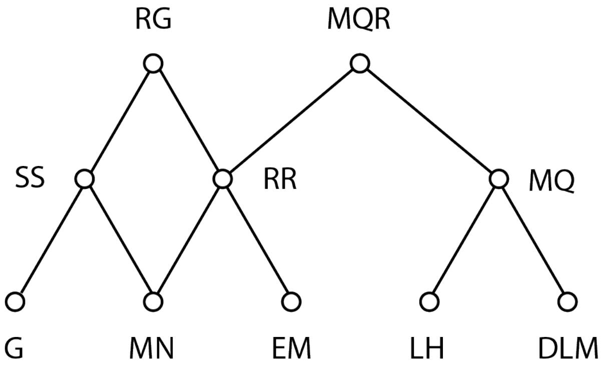


Figura 32: Diagrama argumentantivo en la mecánica del siglo 20.

da (RR) resolvían los problemas, ver la Figura 32.[187]

En este trabajo fundamental, Einstein daba una nueva interpretación a las ecuaciones de transformación que ya había descubierto Hendrik Lorentz (1853, 1928), George FitzGerald (1851, 1901) y también Henri Poincaré. Hemann Minkowski (1864, 1909) en 1908 interpreta –algo que también había adelantado Poincaré– las ecuaciones de transformación como un espacio de cuatro dimensiones, donde el tiempo es la cuarta dimensión imaginaria (en sentido matemático), con una métrica euclidiana. De esta manera se terminaba de destruir la idea de Newton del espacio y el tiempo absolutos e independientes entre sí.[188]

Poco tiempo después, en 1916 [82], Einstein generalizaba el principio de relatividad y construía una nueva interpretación del movimiento planetario (SS) mediante la llamada relatividad general (RG). La idea básica es que la materia curva el espacio y obliga a que los cuerpos se muevan según la trayectoria mínima (la geodésica): la masa determina la curvatura el espacio, la curvatura determina el movimiento de la materia.[189] Esta manera de presentar la gravitación resuelve la cuestión de

[187] No aparece ninguna vinculación directa entere EM y LH, si bien son compatibles y armonizables entre sí, pero no generan ninguna teoría de nivel lógico superior que se deba mencionar.

[188] En esta métrica el espacio y el tiempo se "mezclan", así como el campo eléctrico se "mezcla" con el magnético. No se puede dejar de ver una unidad y lucha de contrarios: espacio–tiempo, campo eléctrico–campo magnético.

[189] Nuevamente encontramos la existencia de dos contrarios sincrónicos: materia y

la equivalencia entre la inercia de la materia y la atracción gravitatoria que la materia ejerce.

En la Figura 32 se muestra que la mecánica de Newton (MN) junto con el origen solar de la gravitación –demostrado por Newton, ver la página 30– (G) generan la teoría del sistema solar (SS). El electromagnetismo (EM) y la mecánica de Newton (MN) generan la relatividad restringida (RR). El movimiento sel sistema solar (SS) y la relatividad restringida (RR) generan la relatividad general (RG).

La observación de la materia durante el siglo 19 y comienzos de siglo 20 –especialmente la química de Dalton, Lavoisier y Mendeleev (DLM)– logró una cantidad de nuevos resultados que condujeron a la mecánica cuántica (MQ) y luego a la mecánica cuántica relativista (MQR). La lista –seguramente incompleta– es la que sigue:

- *Ley de Dalton* (1805). La materia está formada por átomos que se agrupan en moléculas con diferentes estructuras y combinaciones.[190]
- *Ley de Dalton* (1805, etc.). A cada tipo de átomos se puede asociar un "peso atómico" –masa sería más correcto decir– vinculado con la manera como se forman las moléculas. Se deriva una medida relativa con relación al hidrógeno, tomado como unidad.
- *Ley de Mendeleev* (1865–1870). Si se ordenan los diferentes átomos conocidos por sus pesos atómicos, se puede observar que existe una periodicidad en las propiedades físicas y químicas, eventualmente se detectan "lagunas".
- *Ley de Bunsen–Kirchhoff* (1860, etc.). A cada átomo le corresponde un espectro –esto es, un conjunto discreto de frecuencias– luminoso emitido o absorbido cuando es excitado bajo ciertas condiciones.
- *Ley de Mendeleev* (1865–1870). Todas las "lagunas" fueron completadas por elementos que todavía no había sido descubiertos.[191]

---

curvatura del espacio. Cada uno existe debido al otro.

[190] Resultado considerado por Feynman, al comienzo de su física, como un logro inmenso.

[191] El caso del *ekasilicio* –hoy llamado germanio– fue el primero. Las series de lantáni-

- *Ley Thomson, Rutherford y otros* (1896–1914). Existen partículas más pequeñas que los átomos. Los átomos son una estructura compleja formada por estas partículas.

La estructura del átomo fue el principal tema de estudio al comienzo del siglo 20. Las partículas sub–atómicas no se comportaban como la partículas macroscópicas. Los electrones que orbitaban el núcleo atómico no irradiaban energía y los espectros de energía emitidos por los átomos no eran continuos. Comenzó así una serie de descubrimientos que mostraban diversos aspectos de la estructura de la materia:

- *Ley de Planck* (1900). La emisión de un cuerpo caliente se puede explicar por osciladores cuya energía es discreta, en múltiplos de $h\,f$, donde h es la contante de Planck, f es la frecuencia emitida.
- *Ley de Einstein* (1905). La emisión de electrones por la luz incidente –el efecto fotoeléctrico– se explica por la ley de Max Planck (1858, 1947). La emisión se producía si $h\,f \geq E$ donde h es la contante de Planck, f es la frecuencia del fotón incidente y E es la energía necesaria para liberar un electrón del material.
- *Difracción de electrones* (1924–1927). Los electrones se comportan como si fueran ondas que cumplen con las hipotéticas ondas de materia propuestas por Louis de Broglie (1892, 1987).[192]

La confluencia de las ideas de tabla periódica de los elementos, espectros discretos de los átomos y energía que se comporta en forma discreta llevó a la formulación del átomo de Niels Bohr (1885, 1962) en 1913: los electrones solamente pueden ocupar determinadas órbitas, cada una con una cierta energía. El pasaje de un electrón desde una órbita de mayor energía E_2 a otra de menor energía E_1 libera un fotón de energía $E_2 - E_1 = h\,f$. En cierta media es el proceso inverso del efecto fotoeléctrico: fotón libera electrón, electrón libera fotón.

---

dos, actínidos y trans–uranianos fueron los últimos.

[192] Es difícil imaginar una ley física que responda mejor a la idea dialéctica de unidad y lucha de los contrarios. Onda y partícula son, sin duda, objetos físicos diferentes y opuestos entre sí en sus propiedades. La hipótesis establece que toda partícula de cantidad de movimiento p tiene una conducta ondulatoria de longitud de onda $\lambda = h/p$, donde h es la constante de Planck.

La hipótesis de De Broglie permite explicar intuitivamente las órbitas discretas de Bohr: en la órbita estable debe entrar un número entero de longitudes de onda, luego sólo ciertas órbitas están permitidas a los electrones. De esta manera también comienza a explicarse la tabla periódica de los elementos.

Con estos elementos, Heisenberg publicó en 1925 un trabajo revolucionario [44].[193] Se proponía analizar solamente los parámetros físicos *observables*: la energía del electrón era observable, los detalles de la órbita y de su movimiento, no. El trabajo se centraba entonces en expresiones que permitían reconstruir el espectro del hidrógeno, pero que no intentaban construir una dinámica del electrón. La idea era revolucionaria –pero la exposición era bastante críptica, tal como los señala [1]– y adquirió importancia con la publicación un trabajo de Max Born (1882, 1970) y Pascual Jordan (1902, 1980) [24]. Allí se introducía en la física el uso del cálculo de matrices y se mostraba en forma comprensible los resultados propuestos por Heisenberg. Unas notas adicionales incluían un resultado fundamental para la mecánica cuántica que establecería el puente con la mecánica de Hamilton:

$$p\,q - q\,p = \frac{h}{2\pi i}\,I$$

donde p y q son, respectivamente las matrices de impulso y posición, I es la matriz identidad. Wolfgang Pauli (1900, 1958) calculó en 1926, mediante el nuevo formalismo, el espectro del hidrógeno, formalizó así el átomo de Bohr y descubrió el *spin* del electrón.

Erwin Schrödinger (1887, 1961), a diferencia de Heisenberg y colegas, siguió el camino de las ondas de materia de De Broglie, ver [87].

> *The chief advantages of the present wave–theory are the following. a. The laws of motion and the quantum conditions are deduced simultaneous from one simple Hamiltonian principle. b. The discrepancy hitherto existing in quantum theory between the frequency of motion and the frequency of emission disappears in so far as the latter frequencies coincide*

[193] En forma simultánea Paul Dirac, ver [18], estaba trabajando en la misma idea que Heisenberg.

> *with the differences of the former.* [...] *c. It seems possible by the new theory to pursue in all detail the so–called "transitions", which up to date have been wholly mysterious. d. There are several instances of disagreement between the new theory and the older one as to the particular values of the energy of frequency levels. In these cases it is the new theory that is better supported by experiment.* [87, #1][194]

Schrödinger aplicó el principio de mínima acción –principio de Huygens o de Fermat que establece que las ondas electromagnéticas siguen un camino mínimo– a las ondas de materia propuestas por De Broglie. Observó entonces que las ecuaciones que resultaban tenían una similitud con el hamiltoniano de la mecánica clásica.

> *Take this function* [el hamiltoniano clásico] *to be a homogeneous quadratic function of the momenta* p_x^2 *etc. and of unity and replace therein* p_x, p_y, p_z *by* $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial x)$, $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial y)$, $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial x)$, ψ *respectively. There results the integrand of (20)* [la condición de mínima acción]. *This immediately suggests extending our variation problem an hereby our wave–equation (16) to a wholly arbitrary conservative mechanical system.* [87, #7][195]

[194] Las ventajas principales de la presente teoría undulatoria son las que siguen. a. Las leyes del movimiento y las condiciones cuánticas se deducen, a la vez, del simple principio de Hamilton. b. La discrepancia que existe todavía entre la frecuencia del movimiento y la frecuencia de emisión desaparece desde el momento en las frecuencias entre ellas coinciden. [...] c. Parece posible que la nueva teoría obtenga con todo detalle las llamadas "transiciones", que hasta el presente son misteriosas. d. Hay diversas discrepancias entre la teoría nueva y la vieja en los valores de los niveles de frecuencia. En estos casos, la nueva teoría está más de acuerdo con los experimentos.

[195] Consideremos esta función [el hamiltoniano clásico] que es una función cuadrática homogénea de los impulsos p_x^2, etc. y la unidad y reemplacemos allí p_x, p_y, p_z por $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial x)$, $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial y)$, $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial x)$, ψ respectivamente. Resulta entonces el integrando de (20) [la condición de mínima acción]. Esto sugiere inmediatamente extender el problema de variaciones a la ecuación de ondas (16) para un sistema mecánico conservativo cualquiera.

De esta observación surgió la hoy llamada ecuación de Schrödinger que permite desarrollar toda la mecánica cuántica:

$$H\,\psi(t) = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\,\psi(t)}{\partial t}$$

donde H es el operador hamiltoniano en el cual se reemplazan los impulsos clásico p_x por los operadores $(h/2\pi)(\partial\psi/\partial x)$, etc.[196]

Posteriormente se demostró que la formulación de Heisenberg, Born y Jordan era equivalente a la de Schrödinger, ver, por ejemplo, [18]. Se consolidaba así la mecánica cuántica (MQ), ver la Figura 32. La formulación undulatoria tenía la dificultad de interpretar el significado físico de la llamada "función de onda" ψ. En general se acepta que su módulo normalizado –puesto que es una función de variable compleja– es la distribución de probabilidad en la posición de la partícula.

La función de onda permitió precisar el llamado *principio de incertidumbre*, adelantado en el primer trabajo de Heisenberg. Este principio establece que no es posible conocer con precisión la posición y el impulso de una partícula. En forma matemática se expresa como $\Delta x\,\Delta p_x \geq h/4\pi$ donde Δx y Δp_x son la desviación típica de las medidas de la posición y el impulso en la coordenada x.[197]

La interpretación de la función de onda condujo a una discusión filosófica que se puede resumir en esta célebre cita de Einstein.

> *Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. The theory says a lot, but does not really bring us any closer to the secret of the "old one". I, at any rate, am convinced that He is not playing at dice.*[198]

[196] En el formalismo se reemplaza el vector impulso por $i\,h/2\pi\nabla$ donde ∇ es el operador gradiente y el hamiltoniano es $H = p^2/2m + U$, donde U es la energía potencial. La energía total se reemplaza por el operador $(ih/2\pi)(\partial/\partial t)$.

[197] Dos variables cuyos operadores no conmutan entre sí, obedecen una ecuación de indeterminación. Son, desde el punto de vista dialéctico, variables contrarias sometidas a una restricción cuantitativa.

[198] Carta de Einstein a Born el 4–dic–1926. (La mecánica cuántica se está imponiendo. Sin embargo una voz interior me dice que no es la realidad. La teoría dice mucho pero no nos lleva realmente al secreto de "el viejo". De todas maneras estoy convencido que Él no juega a los dados.)

Además de la objeción epistemológica de Einstein, quedaba un problema más grave todavía. Las ecuaciones de Schrödinger eran ecuaciones diferenciales de segundo grado en el espacio pero de primer grado en el tiempo y esto contradecía la teoría de la relatividad en la cual el tiempo y el espacio se "mezclaban" y eran aspectos del mismo fenómeno.

Oskar Klein (1894, 1977) y Walter Gordon (1893, 1939) propusieron en 1926 una ecuación que resolvía este problema y empleaba la técnica de Schrödinger de extender el formalismo clásico mediante la relatividad restringida. Posteriormente Dirac en 1928 propuso otra ecuación que además tenía otras consecuencias.[199]

Consideremos la ecuación de Klein–Gordon como ejemplo del formalismo empleado. En la relatividad restringida la energía total de una partícula tenía por expresión:

$$E = \sqrt{p^2\, c^2 + m^2\, c^4}$$

donde E es la energía total, p es el impulso, responsable de la energía cinética, m es la masa, responsable de la energía en reposo, y c es la velocidad de las ondas electromagnéticas. Como es natural, esa ecuación con radicales no permite aplicarle directamente el formalismo de Schrödinger. La solución de Klein–Gordon fue elevar al cuadrado la ecuación, aplicar el formalismo para obtener así:

$$\left(- \left(\frac{ih}{2\pi} \nabla \right)^2 + m^2\, c^4 \right) \psi = \left(\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi.$$

Dirac buscó una manera más elaborada de eliminar el radical, lo cual llevó a introducir el spin y también las anti–partículas. De esta manera se generó la mecánica cuántica relativista (MQR).

---

[199] Dirac argumenta así: *There is no need to make the theory conform to general relativity, since general relativity is required only when one is dealing with gravitation, and gravitational forces are quite unimportant in atomic phenomena.* [18, XI, 66] (No es necesario que la teoría cumpla con la relatividad general puesto que la relatividad general se necesita solamente cuando se trate de gravitación y las fuerzas de gravitación no tienen importancia en los fenómenos atómicos.)

La interpretación dialéctica de todas estas teorías requieren un reticulado **3Dn**[200] –o de mayor complejidad– en el cual se pueden asociar los siguientes valores lógicos: G, MN, EM, LH, LDM, SS, RR, MQ, RG, MQR.[201]

En forma análoga a la sección anterior, en $S_1 = (G, SS, RG, \ldots, 1)$ –un *cono* en **3Dn**, por ejemplo– se puede desarrollar la argumentación de la la gravitación (G), la mecánica de Newton (MN), el electromagnetismo (EM) como teorías básicas, el sistema solar (SS) y la relatividad restringida (RR) como teorías de mayor nivel lógico y, finalmente, como mayor nivel lógico, la relatividad general (RG).[202] Esto no impide que pudiese existir una teoría de todavía mayor nivel lógico como es buscado "campo unificado". En forma análoga, en $S_2 = (LH, MQ, MQR, \ldots, 1)$ se puede argumentar, además, la mecánica cuántica (MQ) y la mecánica cuántica relativista (MQR).

En forma más general, se puede definir $S_0 =$ (MN, SS, RR, RG, MRQ, …, 1) –también un cono– donde se puede volver compatible casi todo. Del mismo modo se puede considera $S_0' =$ (MM, RR, RG, MRQ, …, 1) para compatibilizar la teoría.

Igual que en el caso anterior –aplicando la dualidad mostrada por Poincaré– se puede simetrizar el diagrama y construir así una versión axiomática. En este caso los axiomas son dos: la relatividad general (RG) y la mecánica estadística cuántica (MQR). Al considerar regiones alejadas de la materia, RG se convierte en la relatividad restringida (RR); al considerar velocidades pequeñas de movimiento –comparadas con c, la velocidad de las ondas electromagnéticas– se obtiene la mecánica de Newton (MN), el electromagnetismo clásico de Maxwell (EM) y la teoría newtoniana de la gravitación (G).

En forma similar, para velocidades pequeñas de movimiento MQR

[200] En rigor, si queremos incluir los resultados de la Figura 30 se debe trabajar en un reticulado **4Dn**. El nivel lógico inferior se ha omitido a los efectos de simplificar el diagrama solamente.

[201] Por abuso de lenguaje se emplea el mismo símbolo para designar a una teoría y su valor lógico correspondiente.

[202] Vale la pena señalar que la relatividad general emplea la idea de que el Sol es el responsable del movimiento planetario y además usa el valor de la constante de gravitación de Cavendish.

se convierte en la mecánica cuántica (MQ) de donde se deduce –cuando se desprecia h, la constante de Planck– en las ecuaciones de Hamilton y, en consecuencia, las de Lagrange. MQ también explica la existencia de diferentes elementos químicos y las formación de moléculas (LDM).

Los estudios posteriores –al descubrir nuevas partículas elementales– aumentaron la complejidad de MQR pero su consideración está fuera de los alcances de este libro. Solamente se pretendía ejemplificar la aplicación de la dialéctica a la física actual.

La mecánica estadística

La mecánica estadística fue descubierta por Ludwig Boltzmann (1844, 1906) para sistemas de puntos materiales newtonianos y luego extendida en el siglo 20 a las partículas cuánticas. El ejemplo clásico es un gas donde cada molécula se mueve en un recipiente cerrado con una velocidad determinada pero que choca con las paredes del recipiente o con otras moléculas.[203] El problema que interesa estudiar son las propiedades de este sistema en equilibrio, algo que se alcanza debido precisamente a los choques entre sí o con las paredes.

Un sistema aislado, formado por "muchas partículas", con una energía total y un número de partículas, ambas constantes, tiene muchos *micro–estados* internos posibles.[204] En su estado de equilibrio se supone que todos los micro–estados son igualmente probables. Las propiedades del sistema que se pueden medir son *propiedades nuevas*, de todo el sistema y no de sus partículas, ver el comentario de Landau en la página 56. No se puede conocer la velocidad o la energía de cada partícula, pero sí su valor promedio. Los sistemas de tal naturaleza poseen propiedades observables nuevas, la más característica de ellas es la *temperatura*. A partir de la energía, la temperatura y otros parámetros del sistema, se pueden medir otras variables de interés.

[203] Vale la pena recordar que si bien las ideas básicas de la mecánica estadística se desarrollaron en el segunda mitad del siglo 19, la mayoría de los físicos alemanes no creía en la realidad de los átomos y moléculas, tales como Ernst Mach, Wilhelm Ostwald o Max Planck. Planck da un claro testimonio de esta actitud. Fue uno de los padres de la mecánica cuántica muy a su pesar.

[204] Un micro–estado consiste en la posición y velocidad o impulso de cada una de las partículas. Muchas partículas quiere decir, por ejemplo, más que 10^{20} partículas.

El concepto fundamental de la mecánica estadística es la llamada *función de partición*. En un sistema discreto, en el cual la energía total E_i de cada micro–estado, la función de partición Z se define como:

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

donde i es el índice de cada micro–estado, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta del sistema. En un continuo de micro–estados, la suma se convierte en una integral. A partir de la función de partición se definen todas las demás variables observables del sistema en equilibrio.

Hay tres casos importantes de aplicación de la mecánica estadística: los gases perfectos y dos casos complementarios –o también opuestos– de sistemas de partículas elementales: los *bosones* y los *fermiones*. Los fermiones son partículas que cumplen el principio de exclusión de Pauli: en un micro–estado no pueden existir dos partículas en el mismo estado. Por el contrario, los bosones no cumplen con el principio y puede existir cualquier número de partículas en cada estado posible.

Estas consideraciones dan lugar a tres grandes estadísticas: la estadística clásica de Maxwell–Boltzmann (MB), la estadística de los fermiones de Bose–Einstein (BE) y la estadística de los fermiones de Fermi–Dirac (FD).

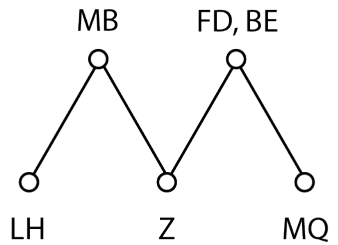


Figura 33: Relaciones lógicas en la mecánica estadística.

En la Figura 33 se representan las relaciones entre la mecánica de Lagrange–Hamilton (LH), la mecánica cuántica (MQ) y la noción de micro–estado y función de partición de Boltzmann (Z).

Dialéctica de las clases sociales

La dialéctica de las clases sociales se estableció por primera ver en el *Manifiesto Comunista*.

> *Freier und Sklave, Patrizier und Plebejer, Baron und Leibeigener, Zunftbürger und Gesell, kurz, Unterdrücker und Unterdrückte standen in stetem Gegensatz zueinander* [...] *Im alten Rom haben wir Patrizier, Ritter, Plebejer, Sklaven; im Mittelalter Feudalherren, Vasallen, Zunftbürger, Gesellen, Leibeigene,* [...] *Aus den Leibeigenen des Mittelalters gingen die Pfahlbürger der ersten Städte hervor; aus dieser Pfahlbürgerschaft entwickelten sich die ersten Elemente der Bourgeoisie.*[205] [61, I, 1-6]

Las clases sociales pueden ser contrarios sincrónicos múltiples. En el capitalismo encontramos las siguientes clases: burguesía, proletariado, campesinos y *estamentos*.[206] Son contrarios sincrónicos. Hay una dinámica entre ellos: los campesinos pueden pasar a proletarios, alguna vez a estamentos; los proletarios, a estamentos o a burguesía; los estamentos pueden pasar a proletarios o a burguesía, rara vez a campesinos; la burguesía puede pasar a estamentos y algunas veces a proletarios. También hablamos de estamentos en plural, un análisis más fino podría diferenciar también estamentos contrarios: intelectuales, profesionales liberales, funcionarios, etc., con intereses de clase diferentes.

---

[205] Hombres libres y esclavos, patricios y plebeyos, señores y siervos, maestros y oficiales, en una palabra, opresores y oprimidos se enfrentaron siempre uno contra otro [...] En la antigua Roma hallamos patricios, caballeros, plebeyos y esclavos; en la Edad Media, señores feudales, vasallos, ciudadanos libres, aprendices, siervos, [...] De los siervos de la Edad Media surgieron los ciudadanos libres de las primeras ciudades con fueros; los primeros elementos de la burguesía se desarrollaron a partir de estas corporaciones urbanas.

[206] En tiempos contemporáneos los sociólogos han llamado *clases medias* a los estamentos materialistas. Esto ocurrió porque los lenguajes naturales no tenían –como tiene el español– una manera precisa de designarlos. Sin embargo, el bajo latín posee la palabra *stamentum* para designar a los integrantes de las corporaciones comerciales urbanas y éste es su significado preciso. En otras lenguas europeas no se adoptó la palabra latina y se prefirió algo derivado de las lenguas germánicas, *burg* –de donde

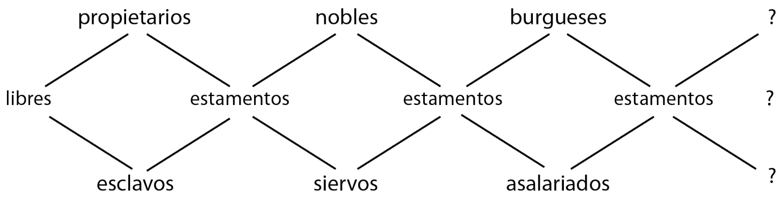


Figura 34: Reticulado de la historia materialista de Europa.

En la Figura 34 se presenta una versión simplificada de la historia de Europa.[207] El diagrama muestra los diferentes contrarios sincrónicos –propietarios y esclavos, nobles y siervos, burgueses y asalariados– y también el devenir de los pares de contrarios. También sugiere lo que es aceptado y *también controvertido*:[208] los estamentos libres son quienes generan las nuevas clases dominantes.[209] También sugiere que son los estamentos libres del capitalismo quienes construirán la sociedad nueva o se convertirán en el fin de la historia.[210]

La importancia de los estamentos se muestra en la existencia de movimientos políticos que pretenden transferir todo el poder social a las clases dominantes y dominadas a expensas de eliminar los estamentos. Estos movimientos reciben muy diferentes nombres que van desde el extremo autoritario que pretende realizar por la fuerza –el *fascismo*– al extremo que pretende hacerlo por la vía de la legislación, el reparto y el poder de contratación del estado, los *populismos*. Los movimientos que pretenden destruir los estamentos han fracasado sistemáticamente

proviene *burguesía*, el estamento de las ciudades medievales–, una palabra para designar primero a las fortalezas y luego a las ciudades con fueros.

[207] Sin duda es el caso que posee más etapas: esclavista, feudal y capitalista.

[208] Esta contradicción dialéctica contiene la gran discusión del materialismo histórico y los diversos "revisionismos" que ocurrieron en la doctrina de Marx. Estos temas escapan a los alcances de esta investigación.

[209] En reticulados de rango 4 se diferencian dos estamentos que generan las nuevas clases dominantes y dominadas pero no existe el estamento central de personas libres. En rango 5 reaparece el estamento central. Estas propiedades alternan entre los rangos pares e impares de los reticulados considerados.

[210] Esta afirmación contradice la tesis del *Manifiesto Comunista* [61] donde se sostiene que serán los asalariados los creadores de una sociedad nueva, en contradicción con la historia previa. Este tema se amplía en [32, 33, 34, 35, 36, 37].

y son, por eliminar a los verdaderos estamentos revolucionarios, movimientos políticamente retrógrados y contrarios al devenir material de la historia.

No se sabe si el proceso dialéctico finaliza con la destrucción del capitalismo, por eso el diagrama plantea interrogantes sobre el futuro.

Un punto a considerar es ¿qué significa la relación de orden del reticulado aplicado a las clases sociales? Es claro que los conceptos de "verdadero" o "falso", en sentido lógico, no se aplican a las clases sociales. La relación de orden sin embargo sí se aplica y puede haber al menos de dos maneras de interpretarla. Una manera es que $\geq$ haga referencia a la *cantidad de población* de la clase. En esta situación 0 significaría un conjunto vacío y 1 el total de la sociedad humana. De esta manera, las mayores cantidades corresponden a las clases dominadas –que siempre son mayoritarias en población– en tanto que las menores serían las clases dominantes, Figura 27. Pero también puede ocurrir a la inversa como se ha representado en la Figura 34. En este caso $\geq$ mide la *riqueza* o el *poder* dentro de la sociedad, un parámetro que es inverso a la cantidad de integrantes. Los estamentos, en ambas interpretaciones, se encuentran en una posición intermedia.

Estas interpretaciones son cuantitativas y aceptables, pero existe una tercera manera de identificar la relación de orden: por el valor creado por el trabajo humano. La teoría del valor de la economía marxista establece que existe un valor creado por el trabajo que es igual para todos seres humanos que forman una sociedad. Esta idea permite dar una nueva definición de las clases sociales.

Las clases dominadas son aquellas que reciben por su trabajo menos del valor creado: son explotadas. Por el contrario, las clases dominantes reciben más del valor creado, son explotadores. El estamento central es el punto de cambio de signo y sus integrantes reciben por su trabajo el valor creado efectivamente. En resumen, la relación de orden está dada por la comparación de la retribución que se recibe por el trabajo realizado y el valor creado por el trabajo. El punto de equilibrio –que aproximadamente ocurre en los trabajadores libres– es el valor social medio creado por el trabajo o también el valor promedio social global por persona.

Las tres interpretaciones de la relación de orden son posibles y, en su fondo, esencialmente equivalentes.

Estas consideraciones y ejemplos muestran que el problema central de la aplicación de la dialéctica a la realidad se encuentra en determinar el reticulado necesario y la asignación de valores lógicos a cada uno de los enunciados reales que se consideran.

El formalismo del materialismo histórico

Se puede establecer una correspondencia inmediata entre las Figuras 14 y 34 que permite formalizar las clases sociales del *Manifiesto*:

Figura 34	Figura 14
propietarios romanos	E
esclavos romanos	a
estamentos romanos	p
nobles feudales	A
siervos feudales	b
estamentos feudales	q
burgueses capitalistas	B
asalariados capitalistas	c
estamentos capitalistas	r

La contradicciones de clase se expresan mediante la negación N_{n-1}: $E = N_{n-1}\, a$, $A = N_{n-1}\, b$, $B = N_{n-1}\, c$. La rotación de los elementos centrales –por ejemplo en **3D5**, ver Figura 14– se expresa mediante la negación N_0: $p \to q$, $q \to r$ que permite interpretar la sucesión de los modos de producción cuando se introducen las ecuación de penetración de los contrarios, ver el Teorema 52.

Consideremos ahora la penetración estricta de la pareja $a \mathbin{\bar{*}} E = p$, la proposición $p \to q$ se puede escribir como $a \mathbin{\bar{*}} E \to q$ que establece que estos contrarios "generan" o "producen" al elemento central q. También de $b \mathbin{\bar{*}} A = q$ resulta que $p \to q$ se puede expresar como $p \to b \mathbin{\bar{*}} A$ que establece que el elemento central p genera una nueva contradicción de clases.[211]

La consecuencia más importante que se obtiene de estos resultados es la diferencia que existe entre la noción de clases contrarias –creadas por la negación N_{n-1}– y el devenir de los modos de producción –creadas por la negación N_0– que muestran que *se trata de dos negaciones diferentes*. En otras palabras, la contradicción entre la clase dominante y la clase dominada se resuelve porque los estamentos crean un nuevo par de clases contrarias diferentes de las clases originales. Esta idea ya se había presentado en [31]. Éste es uno de los principales resultados de la formalización de la dialéctica.

Otro resultado consiste en una explicación de la causalidad por el devenir y la acumulación en cantidad. Consideremos un reticulado **3Dn** con n grande. Si empleamos la notación matemática tendremos:

$$d_i \mathbin{\bar{*}} D_i = C_i \qquad N_0\, C_i = C_{i+1}$$

De estos resultados se obtiene la cadena –todo lo larga que se desee– de procesos de penetración de contrarios que devienen en nuevos procesos del mismo tipo, una cadena causal que permite, por ejemplo, la acumulación en cantidad:

$$\cdots \to d_i \mathbin{\bar{*}} D_i = C_i \to C_{i+1} = d_{i+1} \mathbin{\bar{*}} D_{i+1} = C_{i+1} \to \cdots$$

Este resultado se aplica a todos los procesos de evolución de acumulación circular: la evolución de las especies, la acumulación del dinero o la evolución de una sociedad humana.[212] El ciclo causal extenso –eventualmente infinito– es una extensión del ciclo cerrado finito que genera la negación N_0.

---

[211] En la interpretación del materialismo histórico la primera afirmación se traduce: *la contradicción entre la clase dominante y la dominada genera o crea un estamento intermedio*. La segunda afirmación establece que: *el estamento intermedio genera o produce dos clases contrarias nuevas*. Estas afirmaciones contienen dos de las tesis centrales del materialismo histórico –si bien no son aceptadas por la interpretación leninista– y aparecen aquí como enunciados formales de la dialéctica.

[212] Dicho en forma jocosa, ésta es la ecuación del dilema entre el huevo y la gallina.

Los casos frontera

Las diversas ramas de las ciencias naturales conduce a áreas separadas del conocimiento –contradictorias entre sí– tal como se ha mostrado en secciones anteriores. Esta situación no es tolerable para una ciencia que pretende disponer de una visión unificada del universo. Sin embargo, desde un punto de vista dialéctico nada impide que efectivamente existan "interpretaciones parciales" contradictorias entre sí. Si se rechaza la idea de un conocimiento final y verdadero y se acepta la visión dialéctica de la realidad aparecen, sin embargo, nuevos problemas.

Las diferentes "interpretaciones parciales" plantea el problema de existencia de una *frontera* entre ellas. Muchos científicos han planteado estos problemas. Es posible que el primero de estos planteos se deba a Maxwell y hace referencia a la frontera entre la mecánica –en su momento, la mecánica newtoniana, pero se aplica también a la mecánica cuántica y a la relativista– y los conjuntos de elementos numerosos que son objeto de las *mecánicas estadísticas*.

La idea de Maxwell consistía en imaginar un "demonio" que fuese capaz de visualizar las moléculas de un gas y de esta manera poder separar entre las moléculas veloces y las lentas. Dos recipientes **A** y **B** unidos por una compuerta de pasaje le permitirían al "demonio" abrirle el paso a una molécula rápida de **A** que se dirigía hacia la compuerta y dejarla pasar al recipiente **B**. En forma inversa lo haría con las moléculas lentas. De esta manera el "demonio" lograría que el gas del recipiente **B** tuviera mayor presión y temperatura que el recipiente **A** y violaría así el segundo principio de la termodinámica.

En este caso, como en todos los casos frontera se trata de un *experimento intelectual*: no puede existir un ser y una compuerta que coexista con las moléculas del gas. Todos los objetos están formados por moléculas de tamaños comparables. Pero no es la posibilidad real lo que se discute sino qué sucede en la frontera entre la mecánica clásica, cuántica o relativista y la mecánica estadística.

El problema de la frontera entre la descripción microscópica y la macroscópica de un sistema de muchas partículas afortunadamente se pude analizar en forma cuantitativa. La cantidad de partículas determina las propiedades y existe una relación precisa conocida:

> [...] l*a fluctuation relative de toute grandeur additive f décroît proportionellement à l'inverse de la racine carré du nombre de particules du corp macroscopique.*[213] [52, I, 2]

Si suponemos que un sistema formado por un número de partículas $\sim 10^{20}$ tiene una fluctuación despreciable, un sistema con $\sim 10^{10}$ tiene una fluctuación mucho mayor. La relación entre ambas fluctuaciones es, de acuerdo a lo anterior, $10^{10}/10^{5} = 10^{5}$ o sea cien mil veces mayor que la termodinámica conocida. Sin duda este "caso frontera" no acepta bien ni la descripción microscópica ni la macroscópica. Nos encontramos frente a una teoría que tiene un comportamiento intermedio entre ambas, una teoría que, por el momento, parece no tener utilidad práctica. La respuesta al "demonio" de Maxwell eventualmente sólo se podría dar en una teoría intermedia entre lo macroscópico y lo microscópico, teoría que tendría un valor lógico intermedio, la penetración de los valores, por ejemplo, LH * MB de la Figura 33.

Un segundo ejemplo de frontera, similar al anterior, lo plantea el "gato" de Schrödinger. En un recipiente existe un gato, una ampolla de gas letal y un manantial radiactivo cuya emisión es capaz de romper la ampolla. Éste es un caso de la frontera entre la mecánica microscópica y la macroscópica, entre la física cuántica y la clásica. En la visión cuántica la ampolla está en un estado superposición de dos, el estado ampolla intacta y el estado ampolla rota, puesto que hay una probabilidad que la emisión de las partículas radiactivas la rompa. Se plantea entonces la cuestión: ¿el gato está vivo o muerto? ¿Tal vez está en un estado superposición entre vivo y muerto?

Desde un punto de vista menos espectacular, la pregunta que se puede hacer es ¿existe un tamaño para una molécula o una estructura microscópica en el cual comienza a comportarse en forma macroscópica? Hoy sabemos que existen moléculas gigantes: cadenas de carbono como los *nanotubos*, los plásticos o el ADN. Existen nanotubos tan largos como medio metro y se observan propiedades asombrosas de resis-

[213] [...] la fluctuación relativa de toda magnitud aditiva f decrece proporcionalmente a la inversa de la raíz cuadrada del número de partículas del cuerpo macroscópico.

tencia como materiales. Las moléculas de ADN pueden tener centímetros de longitud. Tal parece que estas enormes moléculas poseen, a la vez, propiedades cuánticas, como los enlaces entre átomos, y clásicas como sus dimensiones o su resistencia a la tracción. Igual que en el caso anterior la respuesta se debe buscar en una teoría intermedia cayo valor lógico sea LH * MQ, ver Figura 32.

Un tercer ejemplo clásico los plantea la frontera entre la mecánica clásica y la relativista. Un "viajero veloz" en una nave espacial al acercarse a la velocidad de la luz experimentaría fenómenos de pasaje del tiempo muy distintos que un viajero que no lo hiciera. En este caso, al acercarse a la velocidad de luz, la nave experimentaría un cambio de sus propiedades físicas macroscópicas porque las redes cristalinas de los metales de la nave, unidas por fuerzas que se propagan a la velocidad de la luz, comenzarían a cambiar.[214] Lo mismo le sucedería al viajero, que no es sino una gran máquina bioquímica con enlaces moleculares similares a los de los metales. Posiblemente una teoría de valor lógico MN * RR podría dar respuesta al problema del viajero, ver Figura 32.

Un cuarto ejemplo –no formulado, pero real– es el caso un "agrimensor gigante" que se propusiese *escriturar* la Amazonia como territorio de propiedad privada. Este técnico descubriría que las medidas que toma comienzan a ser contradictorias. Por ejemplo, la suma de los ángulos de cada uno de los triángulos de su triangulación suman más de 180°. Comenzaría a experimentar el pasaje de la geometría euclidiana a la geometría elíptica sobre la superficie de la Tierra. Para tal "agrimensor" sería necesaria una legislación nueva que permitiera esta descripción elíptica de la geometría.

¿Qué nos enseñan todos estos ejemplos? Se pueden extraer varias conclusiones. La primera de ellas es que los casos planteados *no son reales*, no pueden existir, encierran una contradicción insalvable. El "demonio" de Maxwell vive en dos recipientes con una compuerta, pero observa las moléculas. ¿De qué material está hecho el recipiente, la compuerta y el demonio mismo? Si estuvieran hechos de moléculas el

[214] Supongamos que se viaja a *la mitad de la velocidad de la luz*. El factor de corrección relativista es $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1{,}15$, luego el tiempo, las fuerzas y las demás magnitudes físicas experimentan una modificación del 15 % y esto no es despreciable, por ejemplo, en la resistencia de los materiales o lo sistemas electrónicos.

planteo es absurdo: tanto el recipiente como la completa o el mismo demonio sería una malla que dejaría pasar las moléculas y no lograrían actuar como se supone. Al "gato" de Schrödinger le sucede lo mismo: hay una confusión entre la escala del gato y la de las partículas que rompen la ampolla de veneno. El "viajero veloz" al acercarse a la velocidad de la luz se encontraría con muchas sorpresas. La materia que forma la nave espacial comenzaría a dejar de ser funcional –y también su propio organismo– porque todas las acciones eléctricas comenzarían a experimentar cambios puesto que estas acciones también ocurren a la velocidad de la luz. En resumen, todo se iría transformando haste volverse imposible. Algo similar experimentaría el "agrimensor gigante". Al intentar triangular el territorio sus instrumentos serían inútiles por la curva la tierra. Mucho antes de poder medir un ángulo debería crear instrumentos más apropiados para la geometría elíptica.

Una segunda conclusión es que no existen las fronteras imaginadas. A medida que un fenómeno intenta cruzarla, el fenómeno comienza a cambiar y la contradicción desaparece. El "demonio" a medida que se reduce de tamaño –y llega, por ejemplo al tamaño de los insectos más pequeños– disminuye el número de sus neuronas, su capacidad cerebral y su visión. Mucho antes de poder manejar las molécula de una gas, una a una, deja de existir como ser vivo. Las moléculas "gigantes" no se enteran que han abandonado las dimensiones cuánticas y lo medible por el hombre. La nave en el "viajero veloz" se va convirtiendo en una especie de nube al acercase a la velocidad de la luz, sus reacciones químicas corporales y sus instrumentos de navegación paulatinamente dejan de funcionar. Es seguro que no le preocuparán los demás efectos relativistas. Lo mismo le sucede al "agrimensor gigante" a medida que aumenta su tamaño. Ni que hablar las dificultades que tendría para que sus huesos resistieran su propio peso o respirar en la alta atmósfera.

En resumen, las supuestas fronteras son esencialmente inaccesibles, al igual que el cero absoluto o la velocidad de la luz es inaccesible. No obstante esto, existe la posibilidad de existan las teorías intermedias que se han esbozado en los diversos ejemplos.

Ciencia y dialéctica

La lógica dialéctica formalizada en este libro, como se ha mostrado, se aplica desde la matemática a las ciencias sociales, pasando por las ciencias naturales. Es una actividad que realizan espontáneamente los seres humanos al menos desde que hay registros escritos. Es un elemento común de la vida cotidiana, las artes o el humor.

La formalización de la dialéctica es una extensión de la lógica binaria de Boole, Frege o Russell. Como extensión, introduce operaciones nuevas: la penetración de los contrarios, el devenir, la argumentación. Extiende además las nociones de negación y de implicación.

La dialéctica muestra una diferencia esencial entre las ciencias formales y las ciencias experimentales y sociales. En tanto que en las primeras se acepta que son universalmente válidas, las segundas tienen valores lógicos inferiores. Más aún, estas últimas ciencias tienen el aspecto de no llegar nunca a una verdad final como la matemática.

La lógica dialéctica explica naturalmente la existencia de teorías científicas contradictorias pero válidas y útiles a la vez. También explican la progresión de las ciencias a lo largo de la historia. La mecánica de Aristoteles establece un cierto valor de verdad, luego Galilei mejora la teoría, Newton la complementa a un grado que parece alcanzar la verdad absoluta, idea que se mantiene durante un par de siglos. Los físicos del siglo 20, Einstein, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrödinger y otros muestran que existe otra física lógicamente más válida que la de Newton pero con contradicciones entre sí. Nació la idea –algo dialécticamente difícil de aceptar– que es posible una unificación final de toda la física.

Una conclusión importante de este estudio es que la construcción del homomorfismo –la elección de reticulado, la negación y la asociación de los enunciados sobre la realidad con los elementos del reticulado– no es un proceso sistemático, mecánico y que posee reglas precisas. La aplicación de la dialéctica a la realidad es un verdadero *proceso creativo*, el resto es una simple aplicación de reglas formales. Igual que en la matemática, la elección de las verdades universales –los axiomas– son el verdadero proceso creativo, la demostración de los teoremas resultantes, si bien también es un proceso creativo, es mucho menos importante desde el punto de vista epistemológico.

Apéndice: Prólogos de versiones anteriores

Prólogo de 1985

–1–

Las pocas veces que comenté el proyecto de este libro encontré una misma respuesta: *¡cuidado!* Todos los compañeros materialistas dialécticos poseen reservas acerca de la exploración de los principios de la dialéctica desde un punto de vista formal. En un cierto sentido tienen razón, en otro no. La propia existencia de este libro es, desde el principio, una cuestión dialéctica. Se repetía así la historia de "Las Leyes de *El Capital*".

Las oposiciones son de diferentes estilos. Hay quienes dicen que la dialéctica no es formalizable ni expresable, lisa y llanamente. No dan mayores argumentos, solamente *lo sienten así*. Creo que no hay aquí un verdadero argumento sino el reflejo de muchos años de confusión. En la vida cotidiana se emplea con gran liberalidad la palabra *dialéctica* para indicar simplemente una *interacción recíproca*. Cuando se dice que existe una relación dialéctica entre la teoría y la acción o entre la ciencia y la tecnología se realizan afirmaciones correctas. Pero muchas veces quien las enuncia solamente repite afirmaciones clásicas del materialismo dialéctico que verdaderamente no comparte en sus alcances. Estas afirmaciones no son "más dialécticas" que decir, por ejemplo, *es una hermosa mañana de Sol*. Por esta razón decimos que estos compañeros no comprenden los alcances dialécticos de lo que afirman.

Hay otros compañeros que temen que una formalización conducirá a un planteo *mecánico*, a una trivialización de las ideas de la dialéctica. El temor es correcto. Durante los largos años de búsqueda que condujeron a este trabajo, todos los días sentí ese temor. Ahora que esta bastante terminado –nunca se puede decir que un estudio que pretende ser científico esta terminado del todo– pienso que este temor ha desaparecido. Hay varias razones para pensar así.

En primer lugar, en este trabajo se analizan solamente dos leyes de la dialéctica, la tercera no es una ley formal en el sentido de la lógica y tiene poco que ver con este estudio. Un poco más adelante regresaremos sobre el punto.

En segundo lugar, ha sido posible aclarar un punto difícil: la relación entre el pensamiento lógico tradicional y el pensamiento dialéctico. Más aun, creo haber podido demostrar que aún la matemática lleva, *desde un punto de vista formal y esto es lo importante* al pensamiento dialéctico. Esta afirmación es clásica dentro de los materialistas dialécticos, pero nunca se habían dado argumentos lógicos para afirmarlo, solamente argumentos epistemológicos.

En tercer lugar, se establece la continuidad histórica del pensamiento dialéctico y su aplicación a la vida cotidiana para una cantidad de casos. Este es otro punto esquivo en las presentaciones clásicas.

En cuarto lugar, se convierte al pensamiento dialéctico en un tema de investigación académica. Esto posee más importancia de lo que parece en un primer examen. Al ganar un lugar para la dialéctica dentro de los estudios de la ciencia de la lógica se está dando un paso enorme en la lucha ideológica. Tal vez, algún día, se logre dar el siguiente paso: la aceptación entre los economistas "científicos" de las leyes de la economía tal como las estudia y enuncia el materialismo histórico.

–2–

La realidad del universo exige que, además de estudiar la materia, se estudie también el *movimiento de la materia* en forma científica. Si suponemos, tal como ha ocurrido hasta hoy, que la lógica binaria es el reflejo de las leyes generales de la materia, la lógica dialéctica corresponderá a las leyes generales del movimiento de la materia. El propósito de este trabajo ha sido formulado, largo tiempo atrás, por Engels:

> No nos proponemos aquí escribir una tratado de dialéctica sino simplemente demostrar que las leyes de la dialéctica son otras tantas leyes reales que rigen el desarrollo de la naturaleza y cuya vigencia es también aplicable, por tanto, a la investigación teórica natural. [. . .] Las tres leyes han

> sido desarrolladas por Hegel, en su manera idealista, como simples leyes del pensamiento [...] El error reside en que estas leyes son impuestas, como leyes del pensamiento, a la naturaleza y a la historia en vez de derivarlas de ellas. [21]

Lamentablemente el texto de Engels solamente analiza en forma directa la primera ley: la ley del cambio de la cantidad en la calidad. Esta ley no ofrece mayores dificultades de comprensión:

> Podemos expresar esta ley, para nuestro propósito, diciendo que, en la naturaleza, y de un modo claramente establecido para cada caso singular, los cambios cualitativos solo pueden producirse mediante la adición o sustracción cuantitativas de materia o de movimiento [...] [21]

La ley establece que la causa de los cambios es la acumulación de la cantidad. No se trata de una ley formal sino material, por esta razón solamente en forma indirecta se reflejará en este trabajo. La segunda ley, la ley de penetración de los contrarios establece:

> Todos los procesos de la naturaleza poseen dos caras [...] [21]

Esto es todo. El análisis de la realidad lleva a dos aspectos que se presentan como diferentes, opuestos, contrarios, los dos polos entre los cuales se desenvuelve el movimiento. La búsqueda de estos contrarios no es una tarea sencilla ni puede ser manejada a la ligera.

La tercera ley de la dialéctica, sin duda la más fecunda desde el punto de vista formal, establece que el juego de contrarios regresa permanentemente a situaciones por las cuales se ha pasado, pero en una forma enriquecida, aumentada. El movimiento tiene tres fases consecutivas: punto de partida, negación del punto de partida y regreso al punto de partida: negación de la negación. La tercera ley de la dialéctica regula la causa de los movimientos.

Los propósitos de Engels para su *Dialéctica de la Naturaleza* no cristalizaron. Al igual que muchos otros textos clásicos, solamente disponemos de un amplísimo manuscrito sin completar. Tal vez el único trabajo dialéctico completo que existe es el primer libro de *Das Kapital*. Se presentan allí un conjunto importante de contrarios materiales.

En el Capítulo 1 la mercancía aparece bajo un aspecto cualitativo y un aspecto cuantitativo. En el Capítulo 3 la circulación de mercancías es el resultado de dos contrarios: mercancía y dinero. El Capítulo 5 indica que el proceso de producción involucra dos contrarios: pensamiento y trabajo. En el Capítulo 8 se introducen los contrarios básicos: asalariados y empresarios. En el Capítulo 12 se habla de dos contrarios históricos: la ciudad y el campo.

Sin duda los contrarios de *Das Kapital* se parecen muy poco a los contrarios de la lógica tradicional. Es más, es sumamente dudoso que la lógica posea verdaderamente una noción de contrarios. He aquí entonces el material de nuestro estudio: contrarios, negaciones, penetraciones, movimiento.

–3–

La lógica, desde Aristoteles a nuestros días, se presenta como *natural*. En este hecho incide la tradición cultural, la educación, pero, por encima de todos estos hechos, *es natural porque fue impuesta al cerebro humano por la evolución de las especies*.

Si se intenta fundamentar la validez de la lógica de Aristoteles se pueden dar cuatro argumentos poderosos que afirman su carácter natural y su universal aplicabilidad a la ciencia.

El primer argumento es *histórico*. La existencia de los *Elementos* de Euklides, escritos 22 siglos atrás, nos muestran que las estructuras lógicas –por lo menos en los últimos miles de años– no han cambiado. La continuidad histórica del pensamiento formal, que se pierde en el Egipto clásico, es un primer y fundamental argumento.

Las lenguas modernas pueden expresar cualquier estructura lógica booleana. Este hecho ha ocurrido *sin la intervención de los lógicos*, es un hecho *natural* y constituye un segundo y formidable argumento.

Se conoce bien poco sobre el funcionamiento del cerebro humano, sin embargo, dentro de lo conocido, ya se han podido encontrar conexiones neuronales que arman *circuitos lógicos binarios* elementales y también este es un hecho natural. Este es un tercer argumento.

El cuarto argumento es de carácter científico. La astronomía de los calendarios agrícolas empleó, en el pasado histórico, la matemática en forma profusa. Con Euklides y otros científicos alejandrinos, la geometría se convirtió en una rama de la matemática deductiva. Con Galilei y Newton, la física se convirtió en una ciencia matemática. Con Lavoisier la química siguió el mismo camino. En el siglo 20, con la genética molecular, la biología siguió el camino de la formalización. Este proceso muestra que la herramienta fundamental para el análisis de la materia es la lógica de Boole y éste es un formidable argumento.

Para estudiar la lógica dialéctica debemos seguir un camino similar. La dialéctica se debe buscar en aquellos puntos, en los intersticios donde se quebranta el pensamiento lógico y donde se identifica un área que no es analizable en los términos lógicos tradicionales. Por esta razón, las fuentes de la dialéctica se encuentran en las mismas fuentes de la lógica.

Puesto que la dialéctica es el reflejo de leyes generales del movimiento de la materia, debe existir una actividad *natural* del cerebro humano que sea dialéctica. También a la dialéctica debe ser aplicable el argumento de la evolución de las especies y debe también haber incidido por igual en los circuitos cerebrales. Así es que el cerebro –humano o animal– debe poseer una actividad dialéctica que le es útil para su relación con la naturaleza, así como la capacidad analítica lo es. En forma análoga, debe existir una lógica dialéctica escondida en un argumento histórico, en un argumento lingüístico, en un argumento fisiológico y en un argumento científico.

La búsqueda de la dialéctica se convierte entonces en la búsqueda de lo *no–lógico*, la búsqueda de las fallas y fisuras del aparentemente monolítico planteo de la lógica binaria.

–4–

Muchos estudios de la lógica son pedantemente técnicos. Russell, Tarski y otros abrieron una puerta muy peligrosa el día que enunciaron la idea de que existen múltiples niveles para entender la lógica. Por esta puerta entró una forma de presentar los problemas lógicos que no logra el propósito que se busca porque este propósito contradice el fundamento de la lógica: la lógica es impuesta por la naturaleza a la estructura del cerebro y no existen estas pretendidas meta–teorías.

Desde un punto de vista más directo, las presentaciones de la lógica, con su pretendida e imposible aspiración de eliminar al hombre pensante, se convierten en una pedante cadena de trivialidades, cada una, una meta–trivialidad de la anterior, que persigue una finalidad imposible. En resumen, hay una complacencia morbosa por demostrar que el pensamiento humano es el resultado mecánico de reglas de manipulación de símbolos y que todo lo demás es metafísica. Todas estas presentaciones cometen el error de olvidar que aun la frase *esto es un libro de lógica* es una afirmación dialéctica. Para entenderla o bien se cae en el abismo sin fin de las meta–teorías o bien se entra de lleno en la lógica dialéctica.

Eliminemos las meta–teorías y habremos simplificado la lógica; pero solamente en un ambiente dialéctico es posible esta transformación. Confiamos que este trabajo lo demuestre así.

–5–

Este trabajo pretende ser una investigación científica acerca de la lógica. Desde este punto de vista, puede ser considerado como una incursión en el tema de las lógicas *multivaluadas*. Es bien conocido que este tema ha sido estudiado muchas veces como una generalización abstracta de la lógica booleana. Este trabajo es diferente, intenta enfocar el problema de la dialéctica y por esta razón finaliza en las lógicas multivaluadas. Hasta el momento actual, el enfoque de las lógicas multivaluadas finalizó siempre en el punto en el cual comenzó. Son sumamente ilustrativas las palabras de Garrett Birkhoff:[215]

> La mayoría de los sistemas estudiados en el pasado simplemente ordenan los grados de verdad que poseen las proposiciones. Todos los que me son conocidos emplean reticulados distributivos y por lo tanto uniones sub–directas de lógicas binarias. El autor no ve ninguna razón válida para poner este énfasis en un orden tan simple. Parece valer la

[215] Ver la cita original en la página 73.

> pena construir un cálculo proposicional basado en reticulados no distributivos de valores lógicos, digamos de cinco elementos. En los intentos que he realizado para hacer esto me he visto obstaculizado por la dificultad de determinar, a partir de los valores lógicos de p y q, los valores de $p \Rightarrow q$ y de $\neg p$.

Esta situación nace de un intento razonable –Birkhoff intuye, con su olfato de matemático, que el problema se encuentra en los reticulados de cinco elementos– pero no posee una orientación real para estudiar el problema. Creemos que los que estudiaron el problema posteriormente les ocurrió lo mismo.

En este estudio el problema se plantea al revés: *existe la dialéctica en la naturaleza* y es necesario, por lo tanto, encontrar su expresión formal. Como consecuencia se llega a una lógica multivaluada. Hasta aquí esta todo claro. Pero el problema no finaliza con la simple formalización.

Una teoría científica, además de explicar lo conocido –en este caso algunas de las proposiciones del materialismo dialéctico– debe obtener resultados nuevos que puedan ser sometidos al riguroso examen científico. En esta obra hemos encontrado algunos resultados nuevos y existe la posibilidad de un dictamen de la realidad.

Gödel demostró una mitad de un gran problema. En toda teoría formal, suficientemente rica para contener a la aritmética, se pueden formular proposiciones con propiedades lógicas singulares. Gödel se manejaba en los estrechos límites de la lógica booleana y declaró haber encontrado una proposición *no decidible*. Para un dialéctico el resultado es diferente, en lugar de una proposición *no decidible* el resultado de Gödel se puede enunciar así:

> En toda teoría formal, suficientemente rica para contener la aritmética, existen proposiciones *dialécticas*.

Pero existe el problema inverso. Gödel mostró que la matemática conduce de la mano a la dialéctica. La dialéctica, a su vez, nos conduce en dirección contraria. El *devenir* es una parte esencial de la dialéctica y puede ser estudiado formalmente. Pues bien, los estudios no dialécticos del universo suelen conducir a teorías formales y esto no parece tener explicación. En un mundo dialéctico, las leyes físicas son esencialmente leyes de movimiento, enunciados en el devenir de las cosas. Porque estos enunciados de movimiento se convierten en enunciados deductivos. La respuesta que da la dialéctica formal es simple y directa: la función devenir, cuando se la simplifica demasiado, se convierte en la implicación booleana. La imagen de un universo con leyes deductivas es la imagen de un universo sobresimplificado en el cual el devenir de la materia se convierte en la implicación de las proposiciones.

–6–

En este trabajo se intenta una presentación formal de la dialéctica materialista desde un punto de vista algebraico. La idea básica es que algunos reticulados, unidos a definiciones convenientes, se corresponden estrechamente con las ideas dialécticas clásicas. Si bien este trabajo emplea un lenguaje algebraico, se ha hecho el intento de presentar una información lo más completa posible. Por esta razón se ha abundado en los ejemplos y la descripción de casos particulares. También se ha incluido la demostración de casi todos los enunciados, aún aquellos que son simples. Con esto se intenta facilitar la lectura de este tema que posee, por sí, una naturaleza interdisciplinaria.

No existe una forma universal de notación lógica, por esta razón se emplea una forma *técnica* de escritura que posee la suprema ventaja de la sencillez tipográfica y de no exigir caracteres especiales.[216] Muchas otras veces se emplea una terminología vieja, clásica, anticuada dirán muchos. Esto es deliberado. Muchos puristas sabrán disimular este aspecto.

La presentación se encuentra dividida en varias partes. En la Primera Parte se introducen los reticulados básicos y la noción de negación.

[216] Empleo la notación $a + b$ para indicar la operación *O–inclusivo*, la disyunción o la operación escrita en la lógica binaria como $a \vee b$. Empleo la notación $a \,.\, b$ para la operación (Y), la conjunción o la operación escrita como $a \wedge b$. Finalmente, las negaciones (suele existir más de una) se escriben $N_3\, a$ en lugar de la clásica notación $\neg a$.

En la Segunda Parte se discute la trayectoria histórica de los reticulados dialécticos y su aplicabilidad para la comprensión lógica del universo.

En la Tercera Parte se elabora la teoría de la implicación y se muestra que en la deducción dialéctica no se cumple uno de los axiomas clásicos. A partir de esta diferencia se analizan diferentes paradojas y se reinterpreta el resultado de Gödel.

En la Cuarta Parte se estudian las diferentes funciones lógicas de la dialéctica. En la Quinta Parte y se consideran las nociones de contradicción material y de penetración de los contrarios. Se analizan los problemas de los cuantificadores y de la dialéctica de predicados. Se discuten los temas del ser y del devenir dialéctico. Se llega así al punto esencial de la epistemología: la confusión que existe, en la lógica tradicional, entre implicación, causalidad y devenir.

El presente trabajo es solamente un paso inicial en la presentación formal de la dialéctica. Hay importantes puntos que todavía quedan sin respuesta y que el aporte de otras personas permitirá aclarar. Sin duda esta tarea será una obra colectiva.

–7–

Este libro es hijo de la dictadura. Si bien la intención de formalizar la dialéctica es una intención vieja y que en otras veces ya la había intentado, fue durante la dictadura que vivió el Uruguay en los últimos años cuando se desarrollaron y escribieron las ideas que aquí están expresadas. Valga también esta pequeña historia para ilustrar una vez más el carácter dialéctico de la realidad.

El presente estudio comenzó en 1974 y fue alimentado por la necesidad de una resistencia intelectual e ideológica a todo lo que representaba la dictadura. Con el alejamiento de los medios universitarios provocados por mi destitución fue necesario –para poder sobrevivir intelectualmente en el país– concentrarme en una tarea difícil, abstracta y que significara en los hechos una oposición sorda y sostenida. Fue entonces cuando surgió como natural ocuparme del viejo proyecto de formalización de la dialéctica.

El tema tenía una virtud práctica importante: resistía a los allanamientos y permitía tomar notas y estudiar libremente. Durante todos estos años los papeles y cuadernos que formaron los materiales de este trabajo recorrieron Montevideo y muchos rincones del país sin que sintiera ningún temor de transportarlos o de tenerlos conmigo. Quienes vivieron los momentos más oscuros de los últimos años, saben que esta cualidad estaba lejos de ser despreciable.

Montevideo, septiembre de 1985.

Prólogo de 1989

La versión de *Dialéctica* que se publica fue redactada en 1985 y su texto no ha sido corregido desde entonces. Como en todo elemento en movimiento hay, en su publicación, dos fuerzas antagónicas en pugna. Por un lado existe la idea (correcta) que ningún trabajo esta terminado y perfecto jamás. Por otro lado, existe la idea (también correcta) que en cuatro años hay muchas modificaciones al texto de 1985.

Supongamos, como síntesis de la contradicción, que la publicación puede contribuir a estudiar el tema de la formalización de la dialéctica. En este caso es necesario realizar algunas precisiones para aclarar los errores más importantes del texto que se publica. También interesa aclarar aquellos puntos donde la teoría ha avanzado pero se encuentra bajo la forma de borradores y notas dispersas.

En este texto no aparece definido en forma clara en que consiste un reticulado dialéctico. Hoy esta noción esta firmemente establecida. Existe un homomorfismo ("estructural" se lo llama en el texto) que aplica las proposiciones de nuestro conocimiento sobre un reticulado. Este reticulado posee la característica esencial: no posee imágenes homomorfas, es el resultado final del homomorfismo.

Con esta aclaración, un reticulado dialéctico es un reticulado que posee las dos propiedades esenciales (nueva definición):

- posee una negación estricta,
- no posee imágenes homomórficas, es un reticulado simple.

Con estas dos propiedades resulta claro que los reticulados de Lukasiewicz, la lógica difusa, la dialéctica *yin–yang* y tantas otras, poseen la lógica binaria como imagen homomorfa y luego no son verdaderas formas lógicas (o dialécticas) sino variedades disfrazadas de la clásica lógica binaria.

El estudio sistemático de las propiedades de los reticulados dialécticos es un área especializada del álgebra que puede llamarse "dialéctica formal" o, simplemente, "la ciencia de la lógica".

Un segundo punto donde es necesario indicar una laguna del texto es acerca del establecimiento del concepto de "verdadero" y "falso". Ya Lukasiewicz señalaba que los conjuntos "verdadero" y "falso" eran dos conjuntos disjuntos entre los cuales se pueden clasificar las proposiciones. En el momento actual es posible agregar algo más.

Sea **V** el conjunto de las proposiciones "verdaderas" y **F** el de las "falsas". Si consideramos los esquemas clásicos de deducción –Modus Tollendo Ponens (MTP) y Modus Ponendo Tollens (MPT)– tenemos:

MTP: Si $a + b \in \mathbf{V}$ y $a \in \mathbf{F}$, entonces $b \in \mathbf{V}$

MPT: Si $a \,.\, b \in \mathbf{V}$ y $a \in \mathbf{V}$, entonces $b \in \mathbf{V}$

Pero de aquí resulta inmediatamente que el conjunto **F** es un ideal (en el sentido de los reticulados) puesto que:

Si $a, b \in \mathbf{F}$, entonces $a + b \in \mathbf{F}$ para no contradecir MTP.

Si $a \in \mathbf{F}$, entonces $a \,.\, b \in \mathbf{F}$ para no contradecir MPT.

Resulta entonces claro que bajo el homomorfismo "estructural" este ideal **F** solamente se puede convertir en el elemento 0 sin contradecir las propiedades de la negación. De allí las definiciones que se realizan en el texto, muchas veces sin mayor justificación y en abierta discrepancia con la idea original de Lukasiewicz de un único valor verdaderos y muchos falsos. En su interpretación, **V** es un ideal dual del reticulado. En nuestro punto de vista, **F** es un ideal. De más esta decir que si ocurre, a la vez, que **V** es un ideal dual y **F** un ideal, la lógica es binaria como puede demostrarse fácilmente.

Un tercer punto que no queda claro en el texto es la importancia substantiva de las propiedades de monotonía. La propiedad esencial de monotonía posee el siguiente significado:

$a < b$ significa que b es una tesis *más fuerte* (con mayor valor lógico) que a.

El valor 0 –ínfimo del reticulado– indica que la proposición es falsa, el valor 1 –el supremo– indica que es absoluta y totalmente verdadera. Los valores intermedios establecen, tal como se introdujo en las viejas lógicas modales, grados de fortaleza formal de la tesis.

Las derivaciones de este hecho son fundamentales y no se encuentran en el texto. Notemos, al pasar, una de carácter fundamental sobre la función implicación. La función $x \Rightarrow y$ es una función de dos variables que posee las propiedades:

- es monótona en la segunda variable,
- es anti–monótona en la primera variable.

Estas propiedades resultan que una implicación es tanto más fuerte cuanto más fuerte sea su consecuente o cuanto más débil sea su antecedente. Como es natural, todo cuanto se relaciona con este punto no está presente en el texto publicado y algunos puntos se vuelven oscuros o de interés relativo.

Finalmente, hay muchos resultados que se presentan en el texto que están mal demostrados, son conjeturas o son falsos. Deben ser tomados como un intento parcial de abarcar un tema demasiado extenso y difícil.

Montevideo, mayo de 1989.

Prólogo de 2003

Esta versión electrónica corresponde a la versión de 1989 publicada en la revista *GALILEO*. Se han realizado modificaciones tipográficas para mejorar la presentación, pero he intentado respetar el texto original en todo lo posible. Empleo tipografía itálica, –por ejemplo q– para los valores lógicos y las variables de las expresiones; empleo las mayúsculas itálicas –por ejemplo N– para indicar los operadores sobre estas variables. Empleo tipografía romana en negrita –por ejemplo **L**– para indicar los diversos conjuntos.

Se han incluido notas al pie –en la publicación original no existían– con la finalidad de corregir errores, omisiones o completar el texto en aquellos puntos en que el estudio posterior ha mostrado que estaba mal.

La definición del reticulado dialéctico era imprecisa. En esta nueva versión se incluye la nueva definición (si bien no se lo hace con toda la formalidad posible). Las figuras ilustran casos de este reticulado y las notas al pie aclaran los conceptos involucrados.

Desde la publicación original he avanzado en algunos aspectos de la lógica dialéctica pero no se incluyen en esta versión. Quedarán para alguna versión futura cuando este estudio lo considere razonablemente completo. No obstante esto, vale la pena destacar algunos de estos aspectos en este prólogo.

La noción de funciones lógicas intrínsecas no aparece en esta publicación y, sin embargo, me parece esencial. Son aquellas funciones para las cuales *los valores dialécticos de igual nivel lógico son indistinguibles*. En el caso hegeliano, para tomar un ejemplo concreto, no se puede aceptar que haya funciones que diferencien t, a, s. Deben ser enteramente simétricas en ellas. Esta diferenciación impone limitaciones muy serias y muy importantes.

Sea A una transformación que intercambie t, a, s entre sí, sin modificar 0 o 1, entonces si $F(x)$ es una función intrínseca se debe cumplir este diagrama funcional:

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & x & \rightarrow & F(x) & \\ A & \downarrow & & \downarrow & A \\ & y & \rightarrow & F(y) & \\ & & F & & \end{array}$$

Esta relación se puede expresar en forma algebraica como:

$$A\,Fx = F(A\,x)$$

y esto debe ocurrir para todo automorfismo de transformación de los valores dialécticos, es decir, para todo automorfismo intrínseco.

Una propiedad importante de las funciones intrínsecas es *la conservación de las propiedades formales de la lógica binaria*. Uno debería esperar que todas las funciones que poseen significado para la dialéctica deberían conservar las propiedades de la lógica binaria en algún sentido. En un sentido mínimo, las funciones no deberían tomar valores dialécticos sobre los valores 0 y 1. Esto ocurre efectivamente así:

$$F(0) = F(A\,0) = A\,F(0) \qquad F(1) = F(A\,1) = A\,F(1)$$

Luego estos valores deben ser 0 o 1. Las funciones lógicas intrínsecas garantizan que todo aquello que se cumple para la lógica dialéctica, si los enunciados poseen solamente los valores verdadero o falso, también se cumplen para la lógica binaria. Es un principio deseable de compatibilidad.

El exigir que las funciones lógicas sean intrínsecas tiene consecuencias importantes para la función implicación. La menor y la mayor de todas las funciones implicación intrínsecas son:

$$x \Rightarrow y = y + G(Nx) = y + N\,M(x) \qquad x \Rightarrow y = M(y) + G(N\,x)$$

donde G y M son las funciones de Lukasiewicz. Es posible caracterizar una familia general de funciones implicación. Sea $P(x, y)$ una función monótona e intrínseca. Entonces, se tiene para la implicación intrínseca general la expresión y la acotación:

$$y + G(Nx) \leq y + G(Nx) + M(y)\,.\,P(Nx, y) \leq M(y) + G(Nx)$$

Este estudio es esencialmente semántico, se basa en la estructura algebraica de los valores lógicos. Pero hay otra manera de analizar la lógica: como un conjunto de reglas sintácticas de construir enunciados, ver, por ejemplo, [26] [27]. Existe una dialéctica sintáctica y, sin duda, posee más interés que estos aspectos semánticos o algebraicos. A los efectos de ilustrar esta presentación –que es equivalente a la presentación semántica– consideraré como ejemplo el esquema sintáctico de introducción de la negación. Este esquema expresa el mecanismo dialéctico del razonamiento por absurdo.[217]

| a

[217] Se suele llamar *consequentia mirabilis* (consecuencia admirable) según la tradición. El enunciado dialéctico es más restringido que en la lógica binaria.

```
|---
|| ...
|| Na
| ...
| Na
```

La regla de la lógica binaria es bastante más fuerte y su enunciado sintáctico es:

```
| a
|---
|| ...
||b
|| ...
|| Nb
| ...
| Na
```

La aparición de una contradicción, tal como *b* y *N b*, es frecuente en el razonamiento dialéctico y no permite concluir nada de interés. La aplicación de la regla tradicional de introducción de la negación conduce al *ex contraditione quodlibet*, de la contradicción se deduce cualquier cosa. Este resultado es inaceptable para la dialéctica y también para el razonamiento cotidiano como lo muestra el siguiente ejemplo.

Este punto es tan importante que nos detendremos con un ejemplo. Existe un argumento que se atribuye al musulmán que destruyó la biblioteca de Alejandría:

> Si los libros de la biblioteca de Alejandría coinciden con el Corán, están de más y se pueden destruir; si no coinciden, hay que destruirlos por infieles.

Desde el punto de vista formal corresponde al esquema de razonamiento del llamado "principio de contradicción". El esquema es:

```
| libros
|---
```

```
|| Corán
|| ...
|| N Corán
| ...
| N libros
```

La manera de argumentar solamente es válida en la lógica binaria y no en el razonamiento cotidiano espontáneo.[218] El punto endeble de este esquema es que se puede reemplazar el “Corán” –supuestamente una verdad absoluta– por cualquier otro libro y el razonamiento formal seguiría siendo válido lo cual muestra la falacia del esquema deductivo. Todos los libros, como portadores de una verdad parcial, deben ser cuidadosamente preservados.

Montevideo, diciembre de 2003.

[218] En cualquiera de las dialécticas se diría que las dos partes de la afirmación poseen valor de *tesis* y, por lo tanto, no hay ni conclusión ni contradicción. Los libros coinciden con el Corán con valor tesis y no coinciden con valor antítesis.

Bibliografía

[1] Aitchison, Ian J. R.; MacManus, David A.; Snyder, Thomas M.*Understanding Heisenberg?s “magical” paper of July 1925: a new look at the calculational details*. 2008. Texto electrónico.

[2] Battro, Antonio M. *El pensamiento de Jean Piaget*. Emecé, Buenos Aires, 1969

[3] *La Biblia de Jerusalén*, texto electrónico digitalizado en Uruguay, s/f.

[4] Birkhoff, Garrett. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, New York, 1948.

[5] Birkhoff, Garrett. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, 1967.

[6] Boole, George. *The Laws of Thought*. Dover Publications, Inc., New York, s/f.

[7] Boyer, Carl B. Aristetle’s Physics. Sc. Am. V. 182, N. 5, p. 48–51. May–1950.

[8] Catullus, Gaius. *Carmina*. Texto electrónico en *rudy.negenborn.net/catullus/*.

[9] Cavendish, Henry. *Experiments to Determine the Density of the Earth*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. N. 88, p. 469–526, 1798. Texto electrónico.

[10] Carroll, Lewis. *Symbolic Logic*. The Project Gutenberg. Texto electrónico.

[11] Carroll, Lewis *El juego de la lógica*, Alianza Editorial, Madrid, 1972.

[12] Cervantes, Miguel de. *Don Quijote de la Mancha*. Real Academia Española, 2004.

[13] Chalmers, A. F. *What is this thing called Science?* Hackett Publishing Company, Inc. Indianapolis–Cambridge, 1999, 3th. edition.

[14] Comte, Auguste. *Cours de Philosophie Positive*. Bachelier, Libraire, Paris, 1830. 6 Vols.

[15] Darwin, Charles. *The origin of Species*. John Murray. London, 1897.

[16] Davey, B. A.; Priestley, H. A. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002.

[17] Diogenes Laërtius. *Lives of the Eminent Philosophers*. Robert Drew Hicks trans. Texto electrónico.

[18] Dirac, Paul A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1958. Fourth Edition. Texto electrónico.

[19] Diccionario de la lengua española. Real Academia Española. Texto electrónico en *dle.rae.es*.

[20] *Empedokles of Akragas*, John Burnet. Texto electrónico en *www.classicpersuasion.org/pw/burnet/*.

[21] Engels, Friedrich. *Dialéctica de la Naturaleza*. Grijalbo, México, 1961. Texto electrónico original en *www.marxists.org*.

[22] Engels, Friedrich. *Antidühring*. Grijalbo, México, 1968. Texto electrónico original en *www.marxists.org*.

[23] Eudlid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Trad. y coment. Sir Thomas Heath. 2$^{ed.}$. Dover Publications. Inc. New York, s/f. 3 Vols.

[24] Fedak, William A.; Prentis, Jeffrey J. *The 1925 Born and Jordan paper "On quantum mechanics"*. Am. J. Phys. N. 77, V. 2, February 2009. Texto electrónico.

[25] Fitch, F. B. *Symbolic Logic. An introduction*. The Ronald Press Company, New York, 1952.

[26] Freud, Sigmund. *Una teoría sexual y otros ensayos*. Obras Completas. Santiago Rueda, Buenos Aires, 1952.

[27] Freud, Sigmund. *El chiste y su relación con lo inconsciente*. Obras Completas. Santiago Rueda, Buenos Aires, 1952.

[28] García Bacca, J. D. *Los Presocráticos*. Traductor y comentarista. 2 vols. El Colegio de México, México, 1943.

[29] Gödel, Kurt. *On Formally Undecidable Proposition of Principia Mathematica and related Systems*. 1931. En *From Frege to Gödel*, Van Herjensort Editor. p. 596–616.

[30] Granet, Marcel. *La Religion des Chinois*. Paris, 1922.

[31] Grompone, Juan. *Sur la dynamique des classes dans le "Manifeste Communiste"*. Le manifeste communiste 150 ans après. Rencontre Internationale. Paris, 1998.

[32] Grompone, Juan. *El nacimiento de las sociedades de clase*. "La Danza de Shiva", Libro II. Fin de Siglo, Montevideo, 2013.

[33] Grompone, Juan. *Las sociedades feudales*. "La Danza de Shiva", Libro II. La flor del Itapebí, Montevideo, 2009.

[34] Grompone, Juan. *Las sociedades esclavistas*. "La Danza de Shiva", Libro III. (En preparación.)

[35] Grompone, Juan. *La sociedad capitalista*. "La Danza de Shiva", Libro IV. (En preparación.)

[36] Grompone, Juan. *La construcción del futuro*. "La Danza de Shiva", Libro V. Fin de Siglo, Montevideo, 2014.

[37] Grompone, Juan. *Materialismo Histórico*. La danza de Shiva VI. (En preparación.)

[38] Grompone, Juan. *La Lógica de la Poesía en la Obra de Heine*. Homenaje al poeta Enrique Heine. Montevideo, 1973.

[39] Guzmán de Rojas, Iván. *Problemática Lógico–Lingüística de la Comunicación Social con el pueblo Aymara*. Otawa, 1982.

[40] Harrington, John Peabody. *The Ethnogeography of the Tewa Indians*. Washington, Government Printing Office, 1916. Texto electrónico.

[41] Hayes, J. P. *A Unified Switching Theory with Applications to VLSI Design*. Proc. IEEE, V. 70, N. 10, p.1140–1151, Oct 1982.

[42] Hegel, G. W. F. *Science de la Logique*. 3 Vols, Paris, 1981.

[43] Heine, Heinrich. *Buch der Lieder – Livre des Chants*. Aubier, Paris, 1947, 2 Vols.

[44] Heisenberg, Werner. *Physics and Philosophy: the revolution in modern science*. Harper & Brothers, New York, 1962.

[45] Heraclitus. *The Complete Fragments*. Translation, Commentary and the Greek text by William Harris, Middlebury College. Texto electrónico.

[46] Hilbert, David. *Fundamentos de la geometría*. Publicaciones del Instituto "Jorge Juan" de matemáticas. Madrid, 1953.

[47] Heisenberg, W. *Quantum–theoretical Re–interpretacion of Kinematic and Mechanical Relations*. Zeitschrift für Physik, 1925. Texto electrónico.

[48] Hooker, C. A. (editor) *The Logico–Algebraic Approach to Quantum Mechanics*. 2 vols., Ontario, 1975, 1979.

[49] Hughes, R. I. G. *Quantum Logic*. Sc. Amer., V. 243, N. 4, p. 146–157, Oct 1981.

[50] Kepler, Johannes. *Armonice mundi*. En "A hombros de gigantes", edición de Stephen Hawking, Crítica, Barcelona, 2003.

[51] Landau, Lev; Lifchitz, Evgeny. *Mécanique*. Edition en Langues Etrangères, Moscou, 1960.

[52] Landau, Lev; Lifchitz, Evgeny. *Physique Statistique*. Edition Mir, Moscou, 1967.

[53] Lao Tse. *Tao–Te–King*. (Versión de Paolo Siao Sci–Yi) Bari, 1947.

[54] Lavoisier, Antoine–Laurent de. *Mémoire sur la nature du principe qui se combine avec les métaux pendant leur calcination et qui en augmente le poids*. Mémoires de l'Académie des sciences, 1775, p. 520. Texto electrónico.

[55] Lenin, V. I. *Materialismo y Empiriocriticismo*. Montevideo, 1966.

[56] Levendel, Y. H.; Menon, P. R. *Test Generation Algorithms for Computer Hardware Description Languages*. IEEE Trans. Comp., C–31, p. 577–588, Jul 1982.

[57] Lukasiewicz, J.; Tarski, A. *Untersuchungen über den Aussangenkalkul*. Comp. Rend. Acad. Vars., p. 30–50, 1930.

[58] Lukasiewicz, J. *Philosophische Bemerkungen zu Mehrwertigen Systemen des Aussagenkalkuls*. Comp. Rend. Acad. Vars., p. 51–77, 1930.

[59] Mao Tse–tung. *Sobre la contradicción*. Ediciones en lenguas extranjeras, Pekín, 1965.

[60] Marx, Karl. *Das Kapital*. Europäische Verlagsanstalt. Leipzig, 1968. 6 Vols. Texto electrónico original en *www.marxists.org*.

[61] Marx, Karl; Engels, Friedrich. *Manifest der Kommunistischen Partei*. Mursia, Milano, 1984. Texto electrónico original en *www.marxists.org*.

[62] Marx, Karl. *Miseria de la Filosofía*. Buenos Aires, 1971. Texto electrónico original en *www.marxists.org*.

[63] Massera, José Luis. *Dialéctica y matemática*. Facultad de Humanidades y Ciencias, Montevideo, 1985. Texto electrónico.

[64] Massera, José Luis. *Reflexiones de un matemático sobre la dialéctica*. Universidad de la República, Montevideo, 1998. Texto electrónico.

[65] Morgan, Lewis Henry. *Ancient Society*. Charles H. Kerr & Company. Chicago, 1877.

[66] Newton, Ys. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Londini, MDCLXXXVIII (1686). Ed. facsimilar, Dawson & Sons Ltd., London, s.f.

[67] Newtono, Isaaco. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Editio tertia aucta & emendata*. Londini, MDCCXXVI (1726). Texto electrónico.

[68] Newton, Isaac. *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*. Andrew Motte translator. Florian Cajori revised. University of California Press, 1962, 2 Vols.

[69] Newton, Isaac. *Opticks*. Fourth edition, London, 1730. Dover Publications Inc. New York, 1952.

[70] *New Oxford American Dictionary*. Versión 2.2.1, en línea.

[71] Paracelsus the Great. *The Hermetic and Alchemical Writings*. Arthur Edward Waite, editor. Texto electrónico, Google Books.

[72] Petrarca, Francesco. *Rime – Trionfe e Poesie Latine*. Ricciadrdi Editore, Verona,1951,

[73] Piaget, Jean. *Essai de Logique Opératoire*. Paris, 1972.

[74] Piaget, Jean. *Las formas elementales de la dialéctica*. Gedisa, Barcelona, 1982.

[75] Poincaré, Henri. *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, Paris, 1902. Texto electrónico.

[76] Poincaré, Henri. *La Valeur de la Science*. Flammarion, Paris, 1905. Texto electrónico.

[77] Poincaré, Henri. *Science et Méthode*. Flammarion, Paris, 1908. Texto electrónico.

[78] Poincaré, Henri. *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris, 1913, 1926. Texto electrónico.

[79] Poincaré, Henri. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier–Villars, Paris, 1892.

[80] Post, E. L. *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*. Am. Jour. Math., T. 43, p. 163–185, 1921.

[81] Quine, W. V. *Paradox*. Sc. Amer., V 206, N 4, p. 84–96, Apr 1962.

[82] Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H., Weil, H. *The Principle of Relativity*. Dover Publications Inc. s/f

[83] Russell, Bertrand. *History of Western Philosophy*. London, 1961.

[84] Russell, Bertrand, Whitehead, Alfred North. *Principia Mathematica*. Second Edition, Reprinted, Cambridge, 1935, 3 Vols.

[85] Russell, Bertrand. *The Problems of Philosophy*. Prometheus Books, Buffalo, New York, 1988.

[86] Saussure, Ferdinand de. *Cours de Linguistique Générale*. Payot, Paris. 1940.

[87] Schrödinger, E. *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules*. The Physical Review, S. 2, V. 28, N. 6, Dec–1926. Texto electrónico.

[88] Smith, K. C. *The Prospects for Multivalued Logic*. IEEE Trans. Comp., C–30, p. 619–634, Sep 1981,

[89] Thomason, Richmond H. *Symbolic Logic. An Introduction*. Macmillan Company, London, 1970.

[90] Toynbee, Arnold J. *A Study of History*. Oxford University Press, London, 1948. 6 Vols.

[91] Toynbee, Arnold J. *A Study of History*. (Abridgement of Volumes I–VI by D.C. Somervell). Oxford University Press, New York, 1947.

[92] Toynbee, Arnold J. *Estudio de la Historia*. (Compendio de D.C. Somervell). Buenos Aires, 1952.

[93] Vico, Giambattista. *La scienza nuova*. Letteratura italiana Einaudi, Milano, 1959. Texto electrónico.

[94] Wagner, Richard. *Tristan und Isolde*. Libreto de la ópera, 1857.

[95] Wilde, Oscar, *Intentions. The Truth of Masks.* 1891. Google Books.

[96] Zuangzi. *The Sacred Books of China: The Texts of Taoism, Part I*. Oxford: Oxford University Press, Legge, James translator, 1891. Texto electrónico.

[97] Zuangzi. *Chuang Tzu: Basic Writings*. Watson, Burton translator. Columbia University Press, New York, 1964. Texto electrónico.

[98] Zhuangzi. Translated by Nina Correa. Texto Electrónico.

[99] Zhuangzi. *The Writings of Chuang Tzu*, James Legge, 1891. Texto electrónico bilingüe en Chinese Text Project.

Índice de cuadros

Índice de figuras

Índice Analítico

Este índice analítico es una ayuda a la lectura. No incluye ni todos los nombres propios, ni todos los conceptos ni todos los nombres geográficos mencionados en el libro. Es útil para localizar las ideas principales.

Este índice posee una estructura lógica. Esto dificulta algo la búsqueda de una entrada, pero ayuda al lector que ha recorrido el texto en forma desordenada. Es posible que se relacionen aquí algunos conceptos que no parecían vinculados entre sí. En negrita están las referencias más importantes.

ISBN: 978-9974-592-34-6