Ejercicios de mecánica, 1961, 1962

Eladio Dieste

Facultad de Ingeniería, Montevideo.

Colección de ejercicios de Mecánica II propuestos durante los cursos de 1961 y 1962 en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República. Está basada en las notas de Néstor Macé, Omar Braga y Jaime Jerusalmi. Fue recopilada, dibujada y editada por Juan Grompone.

Edición conmemorativa del centenario del nacimiento de Eladio Dieste.

e-mail: jgrompone@ieee.org
Web: www.grompone.org

Escrita y dibujada en OpenOffice, armada en LaTeX.

Versión 1

Montevideo, diciembre de 2017

Contenido

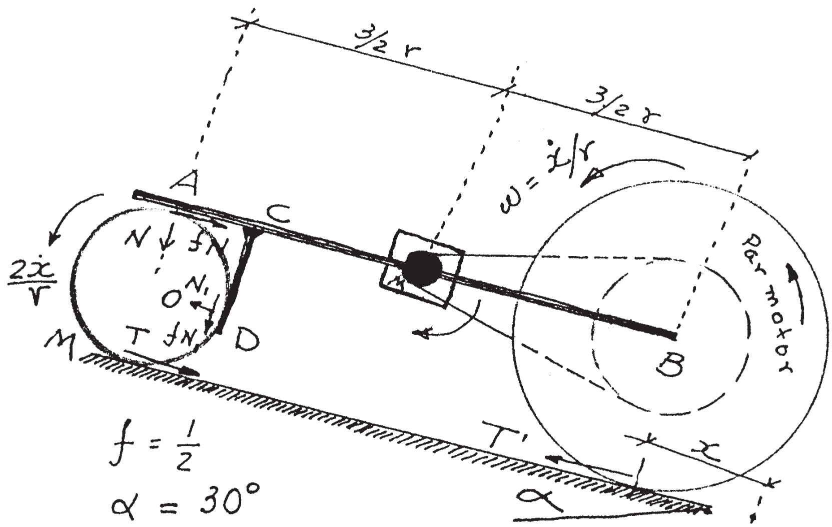
Introducción

Eladio Dieste (1917, 2000) –además de un ingeniero reconocido internacionalmente por sus estructuras de ladrillo, ver [5]– fue también un estimado docente de la Facultad de Ingeniería, no solamente en las áreas especializadas de estructura que eran tema de estudio de unos pocos, sino en la cátedra de Mecánica, donde todos los estudiantes de ingeniería éramos sus alumnos. En 1944, apenas recibido, fue designado profesor adjunto de mecánica, materia de la cual era titular el ingeniero Carlos E. Berta. En este cargo continuó hasta 1965.

Como profesor adjunto tenía la responsabilidad del curso de ejercicios de Mecánica II, que comprendía a la dinámica de sistemas. A lo largo de sus años de diseñador de máquinas había elaborado una colección de problemas que eran un verdadero desafío intelectual y un monumento para la formación en ingeniería. Preocupado por este tema, le pedí a Dieste que buscara alguno de sus viejos problemas. Me entregó uno que no es sino un pálido reflejo de aquellos formidables desafíos que nos dejaban toda una semana meditando. He aquí su enunciado, su dibujo original y sus notas para encarar la solución.

> Un chasis **ABCD**, de masa despreciable, apoya en dos cilindros, de ejes **B** y **O**, cuya masa es m. El cilindro de eje **B** puede girar sin frotamiento alrededor de **B**. El [cilindro de eje] **O** es arrastrado por el chasis, siendo f el coeficiente de frotamiento entre el cilindro **O** y los trozos **CA** y **CD** del chasis. Ambos cilindros ruedan sin deslizar sobre el plano **MN**. Un motor M, de masa m, está unido al chasis y transmite al cilindro **B** un par cuya potencia puede ponerse en función de la velocidad [angular] ω de este cilindro en la forma: $W = A\,\omega^2 - B\,\omega$. Estudiar el movimiento. [1]

[1] La colección de problemas de mecánica que elaboró Dieste durante muchos años quedó en manos de su sucesor en 1965, cuando dejó la materia. Es seguro que éste no comprendía el valor de la colección (y a veces, ¡tampoco los problemas!). Así comenzaron a perderse. La intervención de la Universidad en 1973 y las feroces limpiezas de la dictadura completaron la obra. La colección de problemas hoy ya no existe, si bien he podido recuperar algunas decenas de problemas que algunos compañeros de facultad conservaban en cuadernos. Éste es uno de los pocos ejemplos con los dibujos originales que quedan. Por cierto, es mucho más simple que los problemas que habitualmente resolvíamos en clase.



Dieste nos incitaba en todo momento a pensar en las leyes fundamentales de la mecánica, más que a recordar resultados. Estaba convencido de la importancia de la formación conceptual. También incitaba a leer el clásico libro en Ernst Mach (1838, 1916) [7][2] sobre la historia y los conceptos de la mecánica. Así fue que varias generaciones se educaron con los críticos análisis de Mach. Este libro posee un atractivo casi hipnótico, pero hoy lo juzgo algo dificultoso para un principiante en la mecánica. Puede llevarlo a laberintos metafísicos sin salida.

Dieste nunca dejó de ser un ingeniero mecánico. Como consultor en la represa de Salto Grande tuvo oportunidad de aplicar su sólida formación a grandes problemas de ingeniería: el cojinete de empuje de la Turbina Número 1 y el pontón de guía de la esclusa. Diez años después trabajó en la audaz solución del muelle de barcazas para Nueva Palmira y resumió sus experiencias como constructor de máquinas en artículos técnicos, ver [2].

Esta colección de ejercicios ha sido compilada a partir de algunos exámenes propuesto en la Facultad de Ingeniería [4] y de los cursos de ejercicios de 1961 según las notas de Néstor Macé [6] y de 1962 según las notas de Omar Braga [1] y Jaime Jerusalmi [3]. A estos amigos les debo el haberme suministrado una fotocopia de sus cuadernos de ejercicios con los enunciados y las soluciones. Dejo constancia aquí del agradecimiento para estos colegas.

[2] *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch–kritish dargestellt.* En Montevideo se leía, naturalmente, la traducción francesa o la castellana.

En algunos casos he debo modificar algo los textos de los enunciados porque no eran una versión literal, algunas veces daban por sobreentendido algunos puntos que un lector, medio siglo después, puede tener dificultades para comprender.

En esta primera versión de la recopilación –que conmemora el centenario del nacimiento de Dieste– no se presentan las soluciones de los problemas, esto queda para una futura revisión. De esta manera el interesado en resolver los problemas no se ve tentado a consultar la solución antes de resolverlo por sus propios medios.

Juan Grompone

Montevideo, 1 de diciembre de 2017.

Problemas simples

Ejercicio 1

Un montacargas cuya velocidad de régimen es v_0 se detiene con desaceleración constante después de un recorrido l. En el montacargas hay un recipiente con agua en el que flota un cilindro de radio r, alto a y peso específico ρ, figura 1. Durante el período de desaceleración constante, ¿cuál sería el valor de x correspondiente al equilibrio relativo del cilindro con respecto al líquido? [1, 3]

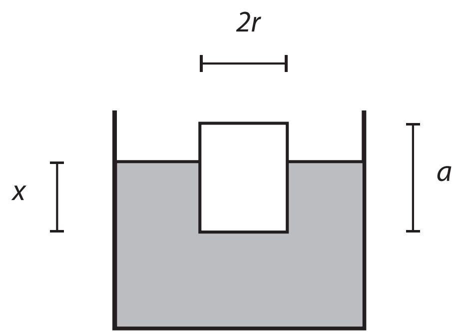


Figura 1: Cilindro flotante acelerado.

Ejercicio 2

Un bloque A de 10 kg de peso apoya como en la figura sobre otro bloque B, figura 2. Entre B y el plano inclinado no hay frotamiento y se sabe que abandonado el sistema a sí mismo, ambos bloques descienden juntos. Se pide hallar el valor y la dirección de la fuerza entre ambos bloques y el mínimo coeficiente de frotamiento f para que el movimiento sea posible en la forma descrita. [6]

Ejercicio 3

Si indicamos con R la resistencia (fuerza) total –que supondremos constante– que experimenta un tren de masa m y con H la potencia constante del esfuerzo de tracción, calcular el tiempo necesario para imprimir al tren, a partir del reposo, una velocidad v_0. [6]

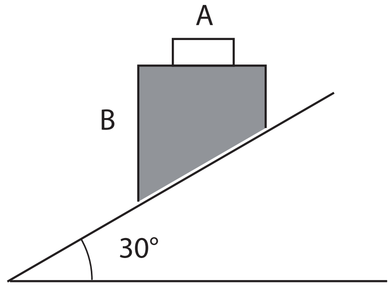


Figura 2: Dos bloques deslizantes.

Ejercicio 4

Un bloque cae a lo largo de la línea de máxima pendiente de un plano perfectamente pulido que forma un ángulo α con la horizontal. Al bloque está unido un péndulo, siendo despreciable el peso del móvil del péndulo frente al del bloque, figura 3. Sabiendo que su período es $T = 2{,}4\,\pi\,\sqrt{l/g}$ con el sistema en movimiento. Calcular el ángulo α. [1, 3]

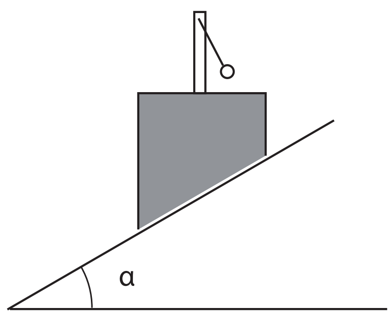


Figura 3: Bloque deslizante con un péndulo.

Ejercicio 5

Sea el sistema formado por un cilindro homogéneo de peso P y radio r, en el cual está arrollado un hilo flexible fijo en su extremo A. El sistema está mantenido en la posición que indica la figura por medio de un segundo hilo auxiliar $\overline{CD}$, figura 4. Se trata de determinar el movimiento del sistema si, estando en reposo, se corta el hilo $\overline{CD}$. [1, 3, 6]

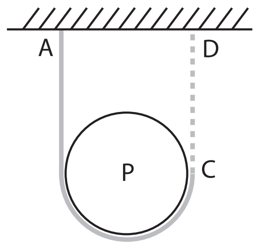


Figura 4: Cilindro colgado de un hilo que se corta.

Ejercicio 6

A un disco circular, de radio r, que se apoya sobre un plano horizontal rugoso, de coeficiente f, se le comunica una velocidad angular ω_0 alrededor de su eje y a éste una velocidad v_0 paralela al plano, figura 5. ¿Al cabo de cuánto tiempo empezará a rodar el cilindro? Discutir. [1, 3]

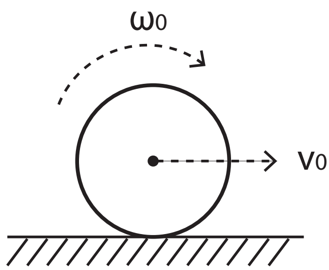


Figura 5: Disco con velocidad inicial y giro.

Ejercicio 7

Una pelota de goma, de masa m, asimilable a una esfera hueca (el espesor de la pared es muy pequeño frente al radio) se mueve rodando sin deslizar sobre un plano horizontal rugoso, empujada por un viento de velocidad v_0, figura 6. Suponiendo que el esfuerzo que aplica el viento a la pelota es proporcional al cuadrado de la velocidad relativa del viento respecto a la pelota, demostrar que la velocidad de la pelota tiende asintóticamente a v_0. [1]

Ejercicio 8

Una cadena de longitud l y peso unitario p que descansa en una extensión $\overline{AB}$ sobre una mesa horizontal y cuelga verticalmente en una extensión $\overline{BC} = x$, figura 7. El coeficiente de frotamiento entre la mesa y la cadena es μ. El frotamiento en la arista B se supone despreciable. El sistema parte con una velocidad nula de una configuración

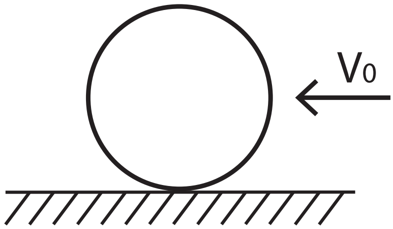


Figura 6: Pelota arrastrada por el viento.

en la cual la longitud de la cadena colgante es x_0. Hallar el movimiento. [3]

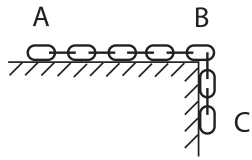


Figura 7: Cadena que se desliza en una mesa.

Ejercicio 9

Una cadena de peso $p\,l$ está situada sobre un piso rugoso de coeficiente μ. Estudiar cómo se mueve cuando comienza a caer, figura 8. [1, 3]

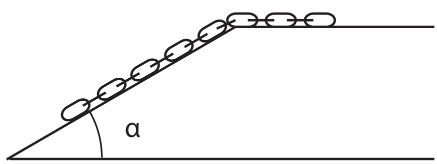


Figura 8: Cadena que se desliza en un plano inclinado.

Problemas intermedios

Ejercicio 10

Sobre un carro se dispone una guía circular $\widehat{AB}$, siendo el peso del carro y de la guía 200 kg. El cilindro C, de 50 kg de peso, descansa sobre la guía $\widehat{AB}$, figura 9. Admitimos que no hay frotamiento entre el cilindro y la guía. Bajo la acción de la carga P el sistema se mueve hacia arriba de tal manera que cuando el cilindro C está en reposo respecto a $\widehat{AB}$ el ángulo COB es 60°. Determinar la reacción de la guía sobre el cilindro, la aceleración del sistema y la fuerza P. La línea $\overline{OB}$ es normal a la máxima pendiente del plano. [1, 3]

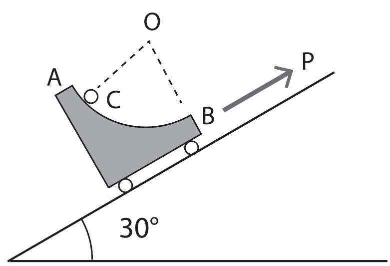


Figura 9: Carro con una guía circular.

Ejercicio 11

Sea el sistema de la figura 10. La polea O es fija, de peso P y radio r, a la cual se arrolla un hilo flexible, sin peso –que por un extremo termina en un resorte de constante λ y está fijo en A por el otro–, después de arrollarse en la polea móvil O', se fija en B. De la polea O' cuelga el peso P. Determinar el movimiento del sistema cuando se lo abandona a sí mismo a partir de una posición próxima a la de equilibrio. [3]

Ejercicio 12

Un tubo circular de radio r gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical, proyectado en O, perpendicular al plano de la sección del dibujo. Dentro del tubo hay una pequeña bolita de masa m sin frotamiento entre el tubo, inicialmente en reposo en A, figura 11. Se pide calcular la fuerza de la bolita contra el tubo cuando llegue a B. [3, 6]

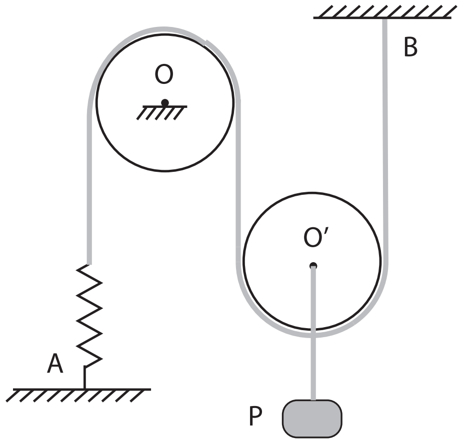


Figura 10: Sistema formado por dos poleas, un resorte y un peso.

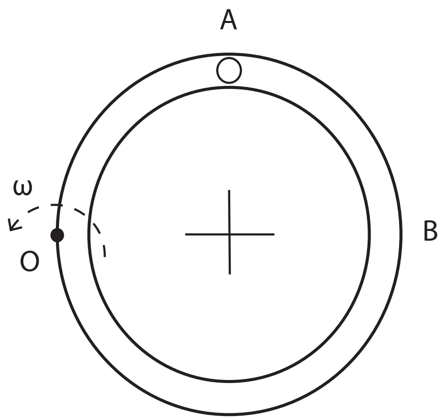


Figura 11: Tubo giratorio con una bolita en su interior.

Ejercicio 13

Sea un volante que gira alrededor de un eje del cual se zafa y cae girando verticalmente. Estudiar el movimiento cuando el disco hace contacto con el suelo (se desprecia el efecto del choque). [1, 3]

Ejercicio 14

Un gimnasta de peso P lleva una pelota de peso p y da un salto de inclinación α, con velocidad v. Cuando alcanza su altura máxima lanza horizontalmente la pelota hacia atrás con una velocidad relativa v_1 (esta velocidad la damos relativa a la velocidad que tiene el atleta en ese momento). Determinar la velocidad v_2 del gimnasta inmediatamente después de lanzar el peso y calcular cuánto aumenta el alcance del salto a causa de dicho lanzamiento. [3, 6]

Ejercicio 15

Un bloque homogéneo, de peso P, longitud $2l$ y altura $2r$, se mueve según la línea de máxima pendiente de un plano inclinado que forma un ángulo α con el horizontal. En un extremo el bloque descansa, por medio del eje O, sobre dos cilindros de peso $P/2$ cada uno y diámetro ligeramente superior a $2r$, que ruedan sin deslizar sobre el plano. En el otro extremo apoya sobre una zapata, de altura muy pequeña, cuyo coeficiente de frotamiento con el plano es μ, figura 12. Calcular la aceleración del sistema. Se desprecia el frotamiento de rodadura. [3]

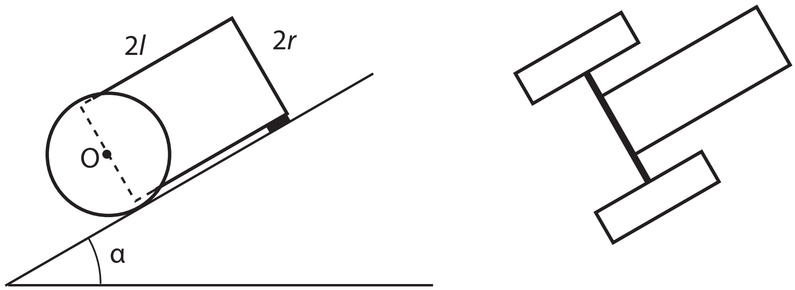


Figura 12: Bloque con dos ruedas y una zapata de freno.

Ejercicio 16

Se considera el sistema de la figura 13. En el equilibro la barra es horizontal. Estudiar el movimiento de este sistema cuando se le separa de su posición de equilibro. [1, 3]

Ejercicio 17

Dos cilindros A y B, iguales, homogéneos, de peso P y radio r, están conectados por un bastidor $\overline{AB}$ de peso despreciable y ruedan sin deslizar sobre un plano horizontal tirados por un hilo que pasando por una pequeña polea O, sin frotamiento, que sostiene en su extremo un peso P, figura 14. Un cuerpo Q de peso P desliza sin fricción sobre el bastidor y se aplica sobre la superficie del cilindro B dando origen a una resistencia de frotamiento de coeficiente μ. Determinar el movimiento suponiendo que en el instante inicial el cuerpo P está aplicado al cilindro B. Se desprecia el trabajo de resistencia de rodaduras y el frotamiento en los ejes A y B. [3]

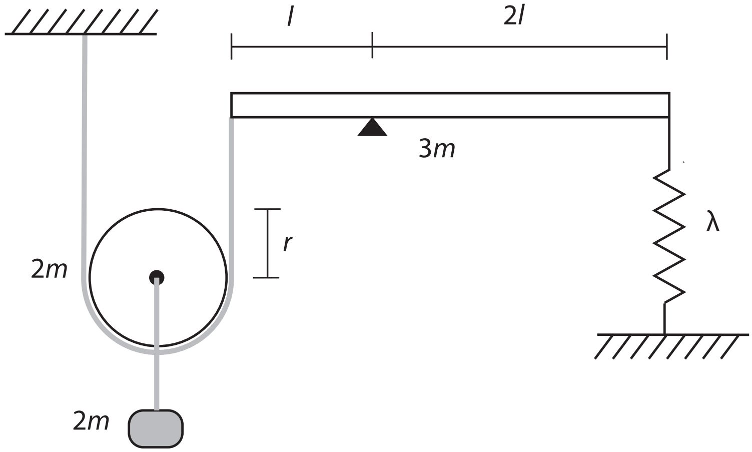


Figura 13: Sistema con polea con un peso, una barra apoyada y un resorte.

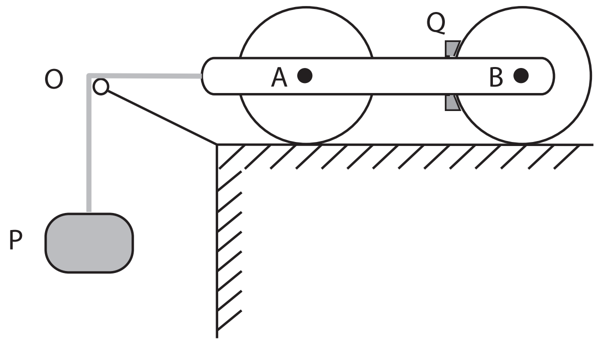


Figura 14: Carro con polea y un peso, que tiene freno en la rueda trasera.

Ejercicio 18

La barra $\overline{OA}$, homogénea, figura 15, de longitud l y peso P_1 gira alrededor de O por medio de una articulación con un frotamiento equivalente a un par de momento M. Apoya en su extremo A, sin frotamiento, contra el bloque B, de peso P_2, que desliza sobre el plano horizontal rugoso, de coeficiente de frotamiento μ, figura 15. Si el sistema parte del reposo en una posición tal que el ángulo θ es 45°, determinar la velocidad del sistema para $\theta = 30°$. [3]

Ejercicio 19

Determinar el movimiento del sistema representado en la figura 16. [3]

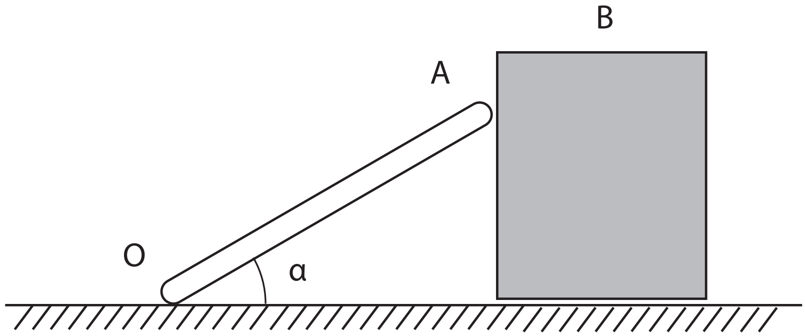


Figura 15: Barra apoyada sobre un bloque.

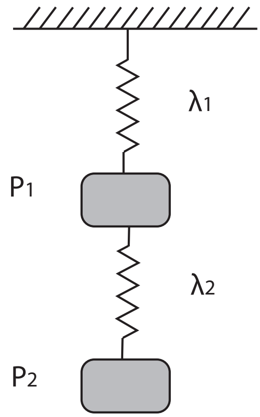


Figura 16: Sistema de masas y resortes.

Ejercicio 20

Se considera el sistema de la figura 17 con las poleas A y B de eje fijo y la polea C colgada de A y B mediante un hilo. La polea A es maciza y la B es hueca, de espesor despreciable frente al radio. Estudiar el movimiento. [1, 3]

Ejercicio 21

Sea el sistema de la figura 18 en que O es un cilindro circular homogéneo de peso P y radio r, O' es una envoltura, también de peso P y radio exterior r, de espesor muy pequeño con relación a r. Ambos están arrollados a una banda de tela flexible e inextensible cuyo peso puede despreciarse. La banda descansa sobre los planos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, inclinados un ángulo α sobre la horizontal y puede deslizar sobre ellos sin frotamiento. Determinar el movimiento si el sistema se abandona a sí mismo sin velocidad. [3]

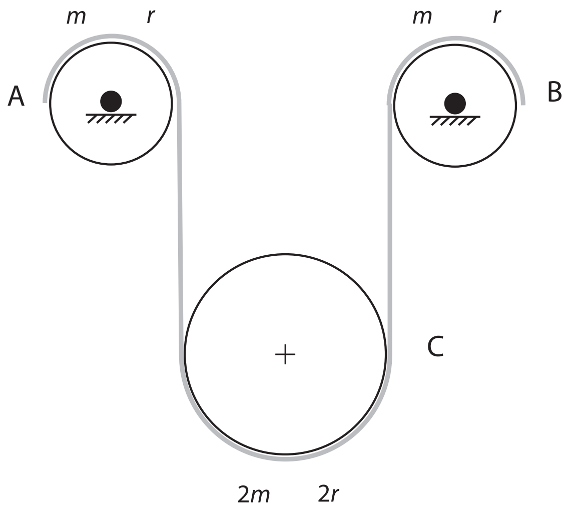


Figura 17: Sistema de tres poleas.

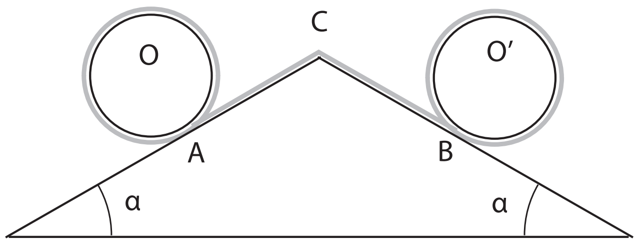


Figura 18: Sistema de dos cilindros en planos inclinados.

Ejercicio 22

Dos bloques A y C, de peso P, descansan sobre un plano horizontal $\overline{MN}$. El coeficiente de frotamiento de los bloques con el plano es 0,1. Sobre las caras a 45° de A y C descansa una cuña B, de peso $2P$ y de coeficiente de frotamiento en A y C que es 3/2 del anterior. A los bloques está unido un hilo flexible, inextensible y sin peso, que pasa por las pequeñas poleas PQR. En R actúa verticalmente una fuerza F cuya potencia es constante e igual a W, figura 19. Determinar el movimiento del sistema. [3]

Ejercicio 23

Un cilindro circular homogéneo, de peso P y radio r, apoya sobre una pared vertical pulida y sobre la arista de un prisma A, cuyo peso también es P, que a su vez descansa sobre un plano horizontal perfectamente pulido, figura 20. Existe frotamiento entre el cilindro y el prisma el cilindro: además de descender, girará y supondremos que el

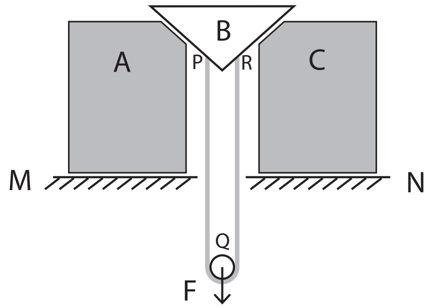


Figura 19: Cuña que separa dos bloques.

giro se produce inicialmente sin deslizamiento. Calcular el coeficiente de frotamiento f entre el prisma y el cilindro si el valor inicial φ_0 de φ es $20°$ y el deslizamiento tiene lugar cuando $\varphi = 45°$. [1, 3, 6]

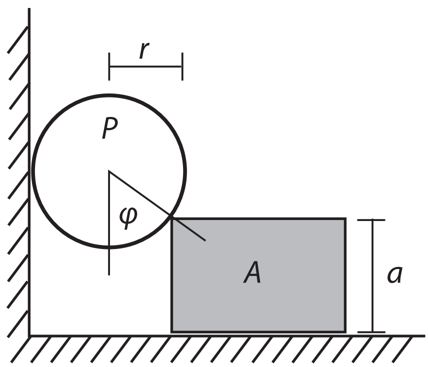


Figura 20: Cilindro apoyado en un prisma con paredes sin frotamiento.

Ejercicio 24

Un disco, de peso P y radio r, descansa sobre un plano inclinado rugoso. Entre el disco y el plano vertical $\overline{MN}$, perfectamente pulido, descansa una cuña, de peso Q, cuyo coeficiente de frotamiento con el disco es μ, figura 21. Determinar el movimiento del sistema abandonado a sí mismo, suponiendo que el disco rueda sin deslizar. Discutir el problema. [1, 3]

Ejercicio 25

Un prisma triangular $\overline{ABC}$, de peso P, descansa sobre un plano horizontal perfectamente pulido, figura 22. Sobre su cara $\overline{AB}$ apoya un cilindro de eje proyectado en E y de peso P. El eje del cilindro está unido a dos resortes, de constante total $\lambda = P/2$

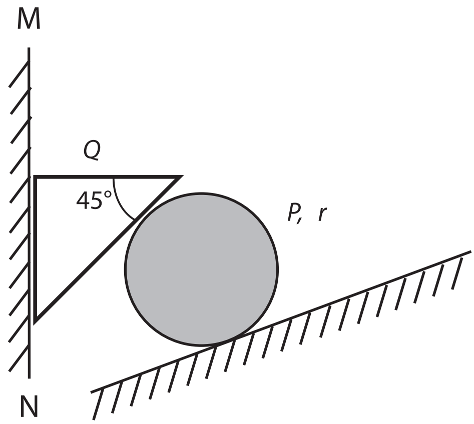


Figura 21: Cuña apoyada en pared sin frotamiento y un cilindro.

kg/cm, que a su vez se fija al prisma en B. Manteniendo al sistema en reposo, apartamos el cilindro de su posición de equilibrio y abandonamos el sistema a sí mismo. Determinar el movimiento del sistema si el cilindro rueda sin deslizar sobre $\overline{AB}$. [1, 3]

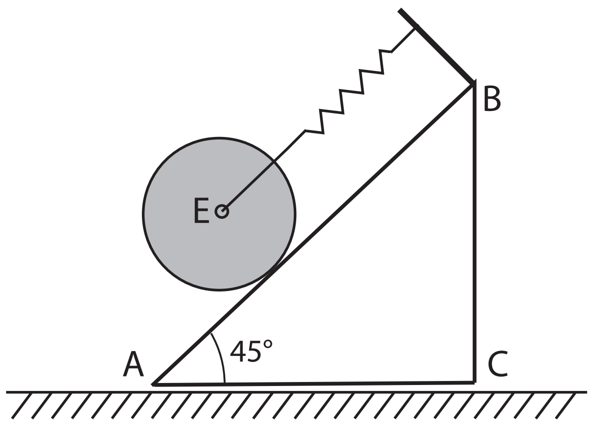


Figura 22: Cilindro son resorte sobre una cuña.

Ejercicio 26

Determinar el movimiento del sistema de la figura 23. [3]

Ejercicio 27

Determinar la frecuencia del sistema de la figura 24, despreciando la amortiguación. Se supondrán pequeñas oscilaciones y se admitirá que en la posición de equilibrio

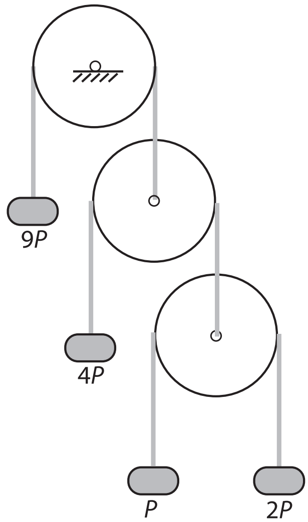


Figura 23: Sistema de tres poleas.

las barras $\overline{AB}$, $\overline{CE}$ y el resorte $\overline{KI}$ son horizontales y las otras barras y resortes son verticales. Las articulaciones en A, B, C y H son sin frotamiento y la unión entre las barras $\overline{CE}$ y $\overline{FG}$ en E es rígida. Todas las barras tienen el mismo peso p por unidad de longitud. Dimensiones: $\overline{CD} = 4a, \overline{AB} = \overline{FH} = 3a, \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{CE} = \overline{EF} = \overline{HG} = \overline{IH} = 2a, \overline{EH} = a$. [1, 3]

Ejercicio 28

Un disco, de masa m y radio r, puede girar sin frotamiento alrededor de su eje $\overline{AB}$ y está animado de una velocidad de rotación ω_0. Otro disco, de masa $m/2$ y radio $2\,r$, se dispone sobre el primero de modo que coincidan sus centros, figura 25. El coeficiente de frotamiento entre ambas superficies es f y admitimos que el peso del segundo disco se distribuye uniformemente sobre a superficie del primero. Se pide la velocidad final común a los dos discos y el tiempo que se tarda en alcanzarla. [1, 3]

Ejercicio 29

Un prisma rectangular homogéneo, de masa $2\,m$, puede deslizar sin frotamiento sobre un plano horizontal. Sobre el prisma apoya un carro asimilable a un prisma homogéneo, de masa m, por medio de dos patas, cuyo coeficiente de frotamiento con el prisma es $f = 0{,}5$, y por dos ruedas, de masa $m/2$ cada una y radio r, que rueda sin deslizar sobre la cara superior de prisma, figura 26. El croquis indica una sección recta del conjunto por el plano vertical que contiene los centros de gravedad de los dos prismas y del conjunto de las dos ruedas. Determinar el movimiento del sistema. [1]

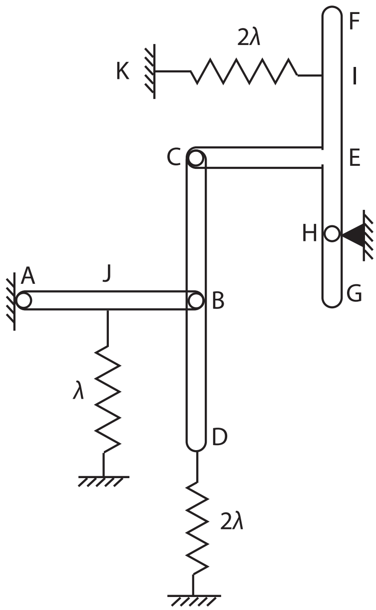


Figura 24: Sistema de barras y resortes.

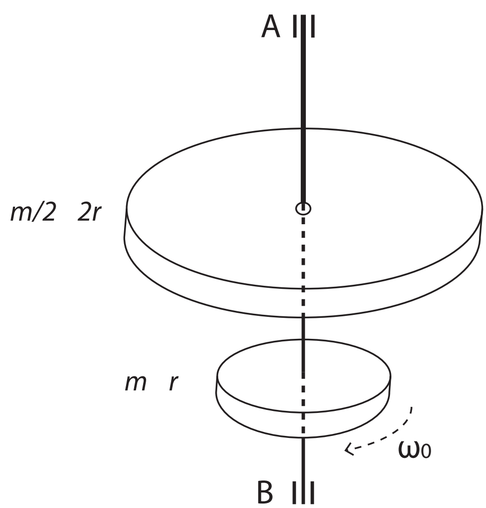


Figura 25: Dos discos que se apoyan con frotamiento.

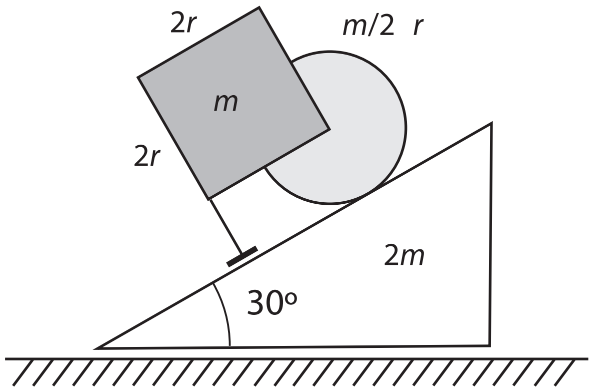


Figura 26: Carro con freno sobre una cuña deslizante.

Ejercicio 30

Un cilindro, de masa $4\,m$, puede rodar sin deslizar sobre el plano $\overline{RS}$ sobre el que descansa. También sobre este plano apoya una cuña $\overline{ABC}$, perfectamente pulida, de masa m, cuya cara $\overline{AB}$ está en contacto con el cilindro y que está unida a los resortes horizontales $\overline{MN}$ de constante total k, figura 27. Estando el cilindro y la cuña en reposo, ponemos entre el cilindro y el plano vertical $\overline{RV}$ otra cuña $\overline{A'B'C'}$, perfectamente lisa, de masa $2\,m$, y abandonamos el sistema a sí mismo. Determinar el movimiento del sistema y la condición para que el movimiento del cilindro sea siempre de rodamiento puro. [1]

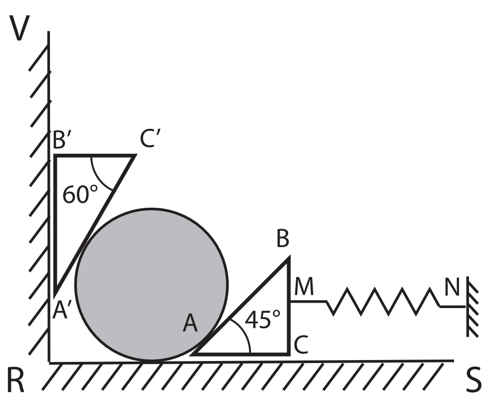


Figura 27: Cilindro con dos cuñas y un resorte.

Ejercicio 31

Un cilindro de eje O, radio r y peso P, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal y puede girar sin frotamiento alrededor de su eje, proyectado en C. En los extremos del eje C se articulan, sin frotamiento, dos vigas $\overline{AC}$ que apoyan en A sobre el plano horizontal, con coeficiente de frotamiento f, figura 28. En el punto medio de $\overline{AC}$ disponemos de un motor, de peso P y potencia W, que mueve una polea de masa despreciable y radio $r/3$, a la que se arrolla un hilo arrollado también al primer cilindro. Determinar el movimiento del sistema. [1]

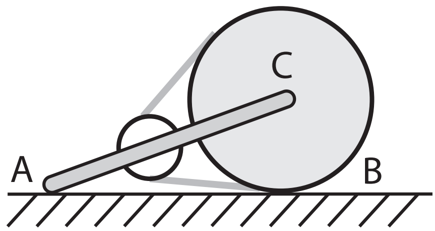


Figura 28: Cilindro movido por una polea de un motor.

Ejercicio 32

Un prisma de masa m descansa sobre un plano rugoso, pudiéndose despreciar el frotamiento con el plano. Sobre su cara $\overline{AB}$ descansa un cilindro, de masa m y radio r, al que se arrolla un hilo que se fija en Q, figura 29. El coeficiente de rozamiento del cilindro con el prisma es 0,05. El prisma arrastra a otro cilindro, de masa m y radio r, que rueda sin deslizar sobre el plano y cuyo coeficiente de frotamiento con el prisma es 0,3. Determinar el mínimo coeficiente de frotamiento de este cilindro con el plano para que la rodadura sea posible. [1, 3]

Ejercicio 33

Un cilindro macizo y homogéneo de masa m, apoya sobre un prisma de masa $2m$, que a su vez descansa sobre un plano horizontal pulido. El cilindro rueda sin deslizar sobre el prisma. Entre el cilindro y el plano pulido $\overline{MN}$ apoya una cuña, de masa $3m$, sobre la que también rueda sin deslizar el cilindro, figura 30. Determinar el movimiento del sistema y el mínimo coeficiente de frotamiento entre la cuña y el cilindro para que no haya deslizamiento. [1]

Ejercicio 34

Un regulador consiste en dos pesos de 25 kg cada uno, unidos a los extremos de dos resortes de constante $k = 20$ kg/cm. Los pesos están guiados, sin frotamiento, a lo

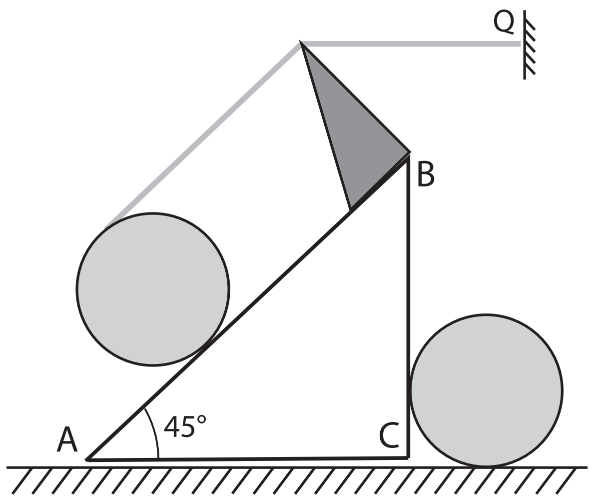


Figura 29: Prisma sobre el cual gira un disco sostenido por un hilo y arrastra otro disco.

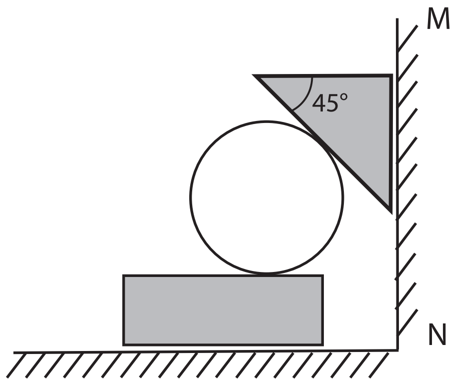


Figura 30: Una cuña apoya sobre un cilindro, que apoya sobre un prisma.

largo de $\overline{MN}$, figura 31. Están perforados y sumergidos en un líquido que llena la caja del aparato de manera que se produce una amortiguación viscosa tal que la relación de dos oscilaciones sucesivas de cada peso, abandonado a sí mismo, es de 0,2. Determinar el seudoperíodo del sistema cuando el eje del regulador gira a 120 RPM. Establecer la condición para que el movimiento sea oscilatorio amortiguado. [1]

Ejercicio 35

Un cubo homogéneo de masa m y lado a, figura 32, puede girar sin frotamiento alrededor del eje vertical $\overline{MN}$. El cubo tiene en su cara $\overline{ABCD}$ una pequeña garganta

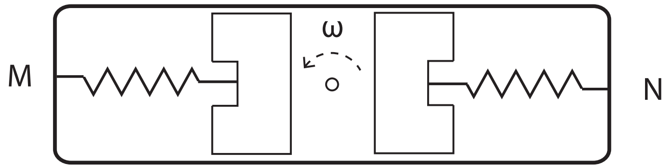


Figura 31: Regulador centrífugo con amortiguación.

$\overline{BC}$, perfectamente pulida. En el punto B de esa garganta ponemos una esfera, de masa $m/3$, con el cubo en reposo. Determinar la velocidad angular ω que habrá adquirido el cubo cuando la esfera abandone en C a la garganta $\overline{BC}$. [1]

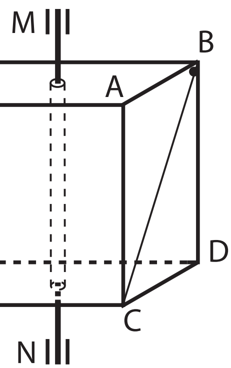


Figura 32: Cubo que gira alrededor de un eje con una bolita en una cara.

Problemas complejos

Ejercicio 36

Estudiar el movimiento de una rueda de avión en los instantes subsiguientes al contacto. El avión al entrar en contacto con el suelo tiene una velocidad lineal v_0. Se desprecia el intervalo de tiempo en que la rueda choca y rebota. [1, 3]

Ejercicio 37

Sea un sistema en que la masa es variable con el tiempo. A un bloque de peso P está atado uno de los extremos de una cadena colocada sobre un plano horizontal cuyo peso por unidad de longitud es p. El bloque es lanzado hacia arriba a partir del plano con velocidad inicial v_0, figura 33. Se trata de calcular la altura a que ascenderá. [3]

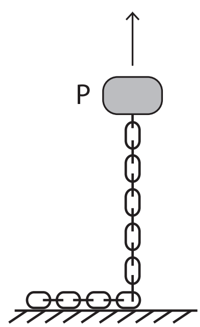


Figura 33: Cuerpo que asciende con una cadena.

Ejercicio 38

Se considera el sistema de la figura 34. Al moverse el chasis, A, por inercia, va hacia atrás y la zapata se aplica contra la rueda, frenándola. Estudiar el movimiento. [1, 3]

Ejercicio 39

Una máquina usada para pulir pisos pesa 100 kg. El disco de materia abrasivo tiene un diámetro de 60 cm. Suponiendo que la presión sobre el piso se reparte diametralmente según la ley parabólica del croquis, figura 35, calcular la potencia que debe suministrar el motor cuando gira a 300 RPM. El coeficiente de frotamiento es $f = 0{,}3$. [3, 6]

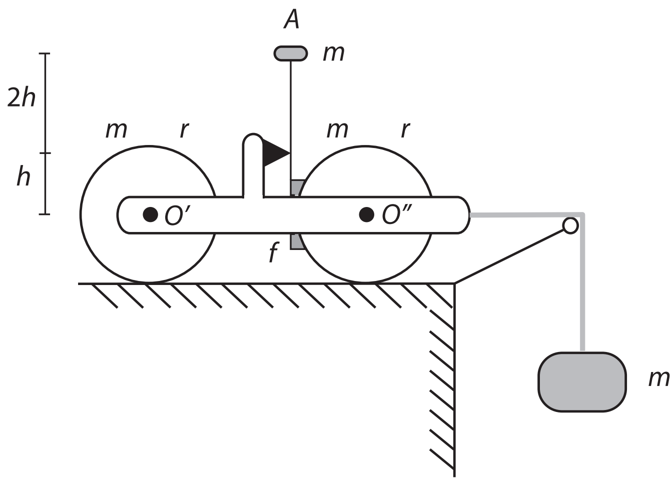


Figura 34: Carro con polea y un peso, que tiene freno en la rueda trasera.

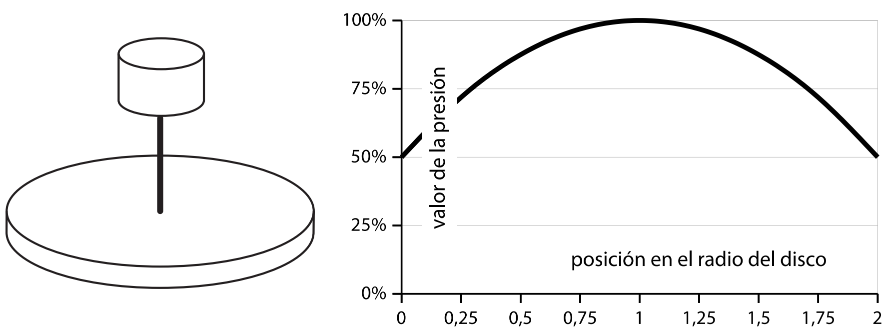


Figura 35: Esquema de la pulidora y de la presión del disco sobre el piso.

Ejercicio 40

Sea un volante que gira en un plano horizontal alrededor de su eje O, figura 36. Lleva en uno de sus rayos un peso P que puede deslizar sin frotamiento a lo largo del mismo y está retenido por un resorte fijado al eje O, de constante elástica λ y longitud natural a. El momento de inercia respecto al eje del volante es I_0. Hallar la ecuación del movimiento. [3]

Ejercicio 41

Un cilindro de peso P y radio r descansa sobre un plano horizontal rugoso. En una garganta de radio a y en un plano baricéntrico perpendicular al eje del cilindro está

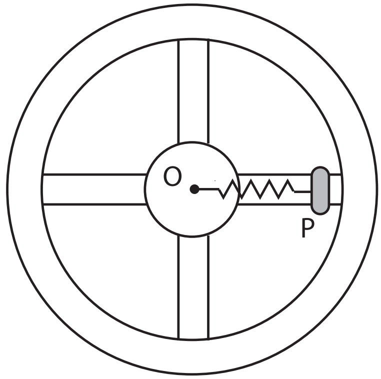


Figura 36: Volante con una masa excéntrica.

arrollado un hilo que tiende con una fuerza constante F que forma con la horizontal un ángulo α, también constante. Suponiendo que el cilindro no patina, determinar el movimiento, la condición de rodadura pura y discutir el problema. [6]

Enunciado alternativo. Se considera el sistema de la figura 37. El rodillo se mueve con rodadura pura. El frotamiento entre el prisma y el bloque es μ. Determinar el movimiento del sistema y estudiar la tensión del hilo en función de α. Se puede verificar que para ángulos α pequeños el hilo se estira, pero para ángulos a grandes el hilo se encoge. Calcular el trabajo para ángulos α pequeños. [1, 3]

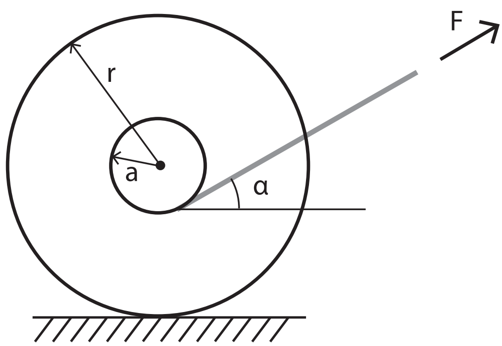


Figura 37: Cilindro que rueda tirado por un hilo.

Ejercicio 42

Una curva para ferrocarril, de 2.000 m de radio, se ha sobreelevado para anular la reacción del riel cuando $v = 45$ km/h. Calcular en HP la potencia necesaria para vencer el frotamiento de las pestañas contra el riel para un vagón de 20 toneladas y cuya velocidad es 60 km/h, figura 38. Supondremos que el coeficiente de frotamiento es 0,15. La pregunta se refiere a la zona de radio y sobreelevación constante. [3, 6]

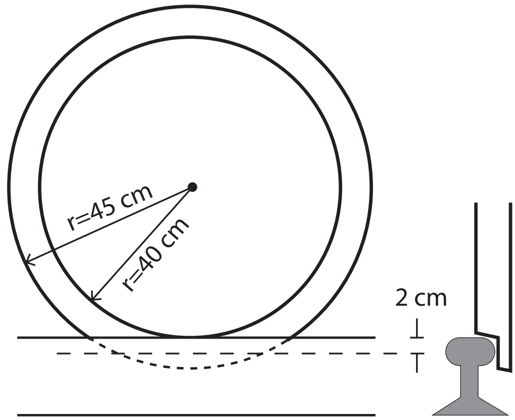


Figura 38: Rueda de ferrocarril y riel (no está en escala).

Ejercicio 43

La cuña $\overline{ABC}$, de masa $2\,m$, cuya sección recta es un triángulo isósceles, puede moverse sin frotamiento sobre un plano horizontal. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ apoyan dos cilindros: uno macizo, de masa $2/,m$ y radio r, y el otro asimilable a una envoltura delgada, de masa m y radio r, figura 39. En ambos cilindros se arrolla un hilo flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por la polea D, de inercia muy pequeña y sin frotamiento, cuya función es mantener los trozos de hilo $\overline{ED}$ y $\overline{DF}$ paralelos a las correspondientes caras de la cuña. Se abandona el sistema a sí mismo y se puede calcular la tensión del hilo durante el movimiento, suponiendo que los cilindros ruedan sin deslizar. [1]

Ejercicio 44

Un chasis $\overline{ABCD}$, de peso despreciable, apoya en los cilindros de ejes B y O cuya masa es m, figura 40. El cilindro de eje B puede girar sin frotamiento alrededor de su eje. El cilindro O es arrastrado por el chasis, siendo f el coeficiente de frotamiento entre el cilindro y los trozos $\overline{CA}$ y $\overline{CD}$ del chasis. Ambos cilindros ruedan sin deslizar sobre el plano horizontal $\overline{MN}$. Un motor M, de masa m, está unido al chasis y trasmite al cilindro B un par cuya potencia puede expresarse en función de la velocidad angular ω de este cilindro en la forma $W = A\,\omega^2 - B\,\omega$. Determinar la expresión $t = \phi(\dot{x})$ que define el movimiento. [1, 3]

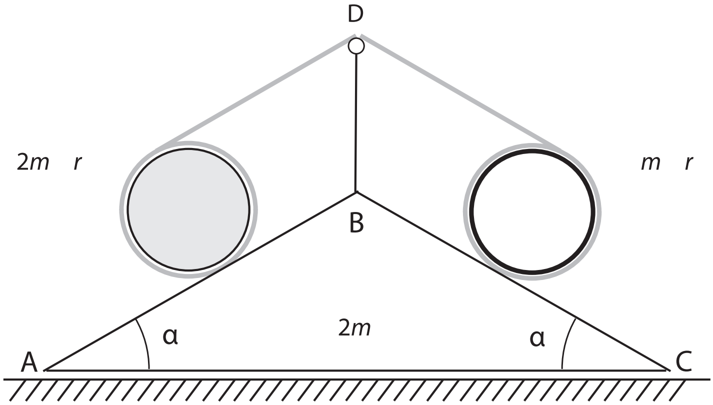


Figura 39: Sistema de dos cilindros en cuña deslizante.

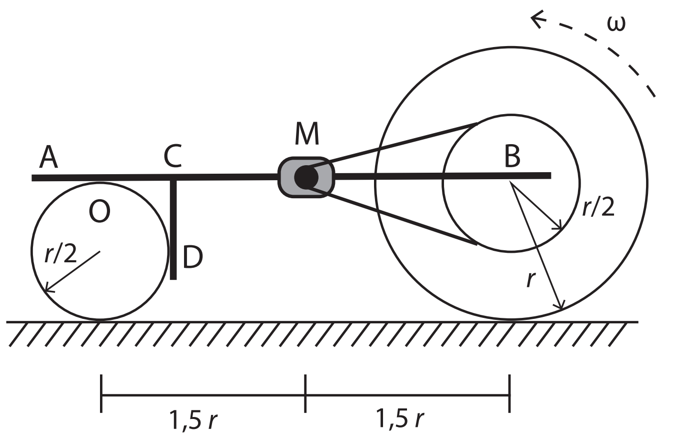


Figura 40: Carro con motor que arrastra un cilindro.

Ejercicio 45

Dos barras de igual peso, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, de longitudes a y $2a$, están unidas en ángulo recto y giran con velocidad ω alrededor del eje vertical $\overline{MN}$ al que están articuladas, figura 41. Su único movimiento posible respecto de dicho eje es el que tiene lugar en el plano $\overline{OANM}$. Calcular ω sabiendo que $\phi = 30°$. [6]

Ejercicio 46

Un cono de masa m y radio de la base r gira sobre un eje horizontal $\overline{AB}$, figura 42. Un hilo arrollado en la base sostiene, mediante una polea de masa despreciable, un disco C de radio $r/2$ y masa m. El hilo rodela al disco y está sujeto en el otro extremos a una

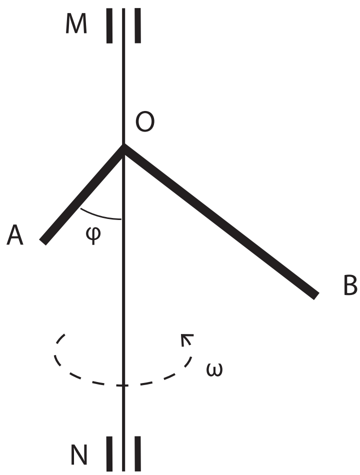


Figura 41: Varillas ortogonales girando sobre un eje vertical.

barra, de masa despreciable, apoyada en D, que frena el movimiento del cono con un coeficiente de frotamiento μ. Las longitudes de la barra son l y $2l$ a ambos lados del apoyo D. Estudiar el movimiento del sistema. [1]

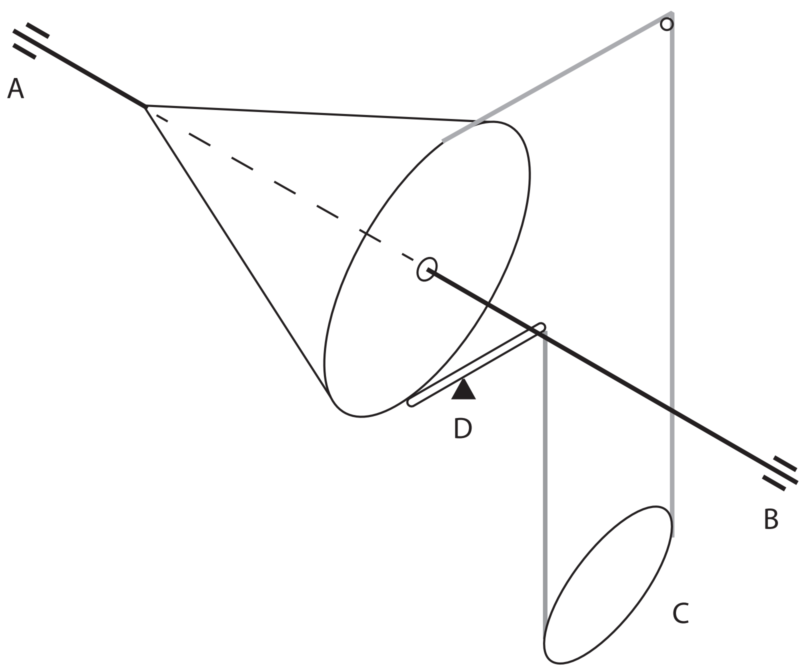


Figura 42: Sistema con cono giratorio sobre un eje horizontal.

Ejercicio 47

Se considera el sistema de la figura 43. ¿Puede haber condiciones tales que el disco no se mueva respecto a la cuña? [1, 3]

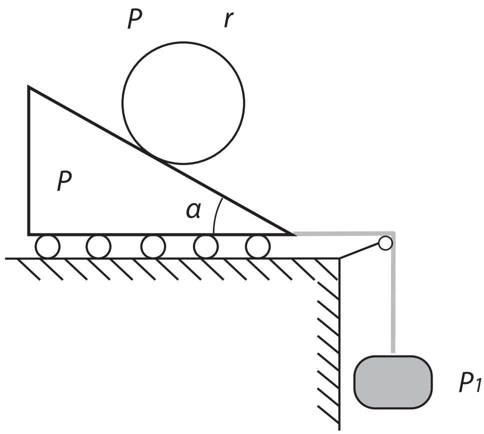


Figura 43: Cuña deslizante con disco inmóvil.

Ejercicio 48

Un cilindro hueco de peso P y radio R puede girar sin frotamiento alrededor de un eje proyectado en O. El espesor de la pared del cilindro es pequeño frente al radio. Dentro de este cilindro hay otro, de peso P y radio $R/3$, que gira sin frotamiento alrededor de su eje, que supondremos fijo y proyectado en O_1. El eje O_1 está unido a la palanca $\overline{OO_1}$ que forma con la vertical un ángulo α. Al primer cilindro está arrollada una cinta de cuyo extremo cuelga un peso $1{,}5P$, figura 44. El movimiento de los cilindros O y O_1 se hace de manera que no patinan las superficies en contacto. Se pide calcular α para que se pueda suprimir la palanca $\overline{OO_1}$ sin que se altere el movimiento del sistema. [6]

Ejercicio 49

Consideremos el guinche de la figura 45. Un motor se describe con la curva de potencia W en función de la velocidad angular ω. Esta curva se puede asimilar, sin mayor error, a una parábola que pasa por el origen: $W = -A\,\omega^2 + B\omega$. El peso a levantar es $P =$ 750 kg. La velocidad v con que se desea levantar es de 1 m/seg. $W = P\,v = 750$ kg.m/seg $\cong$ 10 HP. Considerando que la parábola de potencia tiene $W_{max} = 15$ HP y el rendimiento de esta máquina es del 80 % (teórico), se pide dimensionar el piñón, la corona y estudiar a curva $t = f(v)$. [1, 3, **?**]

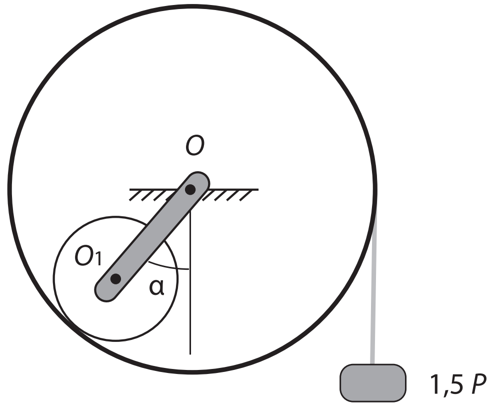


Figura 44: Cilindro hueco con pesa y cilindro interior.

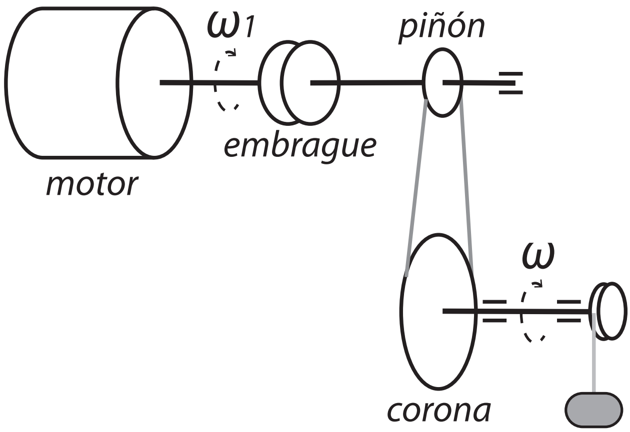


Figura 45: Esquema simplificado de un guinche.

Ejercicio 50

Un prisma triangular $\overline{ABC}$, de masa m, puede deslizar sobre un plano horizontal perfectamente pulido. Sobre la cara $\overline{AB}$ del prisma descansa un cilindro hueco, de radio r y masa m, cuya pared tiene un espesor despreciable y que rueda sin deslizamiento sobre $\overline{AB}$, figura 46. Dentro de este cilindro se encuentra otro cilindro macizo, de masa también m, cuyo movimiento se produce sin deslizar con respecto al primer cilindro. Determinar cuál debe ser α para que si hubiéramos dispuesto al segundo cilindro en la posición definida por α y abandonamos el sistema a sí mismo, el movimiento se produjera sin movimiento relativo del segundo cilindro respecto al primero. [1, 3]

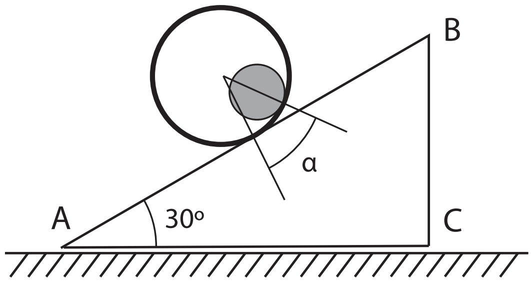


Figura 46: Cilindro hueco con cilindro interior en un plano inclinado.

Ejercicio 51

Un bloque A de peso P descansa sobre un plano inclinado rugoso, siendo f el coeficiente de frotamiento entre el bloque y el plano. En B está articulado el sistema sin peso, de la figura 47, que lleva en M un bloque de peso $P/2$ y en N una base cuyo coeficiente de frotamiento con el plano es f. Al punto Q está unido un hilo que luego de pasar por la polea fija C y por la polea D y se fija en E. De la polea D pende un peso P. Determinar el movimiento del sistema. [6]

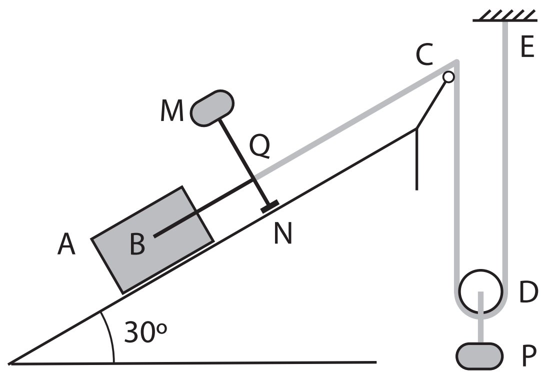


Figura 47: Sistema con zapata y polea en un plano inclinado.

Ejercicio 52

Un cilindro, de peso P rueda sin deslizar sobre un plano rugoso y puede girar sin frotamiento alrededor de un eje proyectado en A. Articulan sin frotamiento en los extremos del eje A y perpendicular a él dos vigas, de peso despreciable, que apoyan sobre el plano en C con un coeficiente de frotamiento 0,1. A las vigas $\overline{ABC}$ están rígidamente unidas dos guías, de peso despreciable, que llevan en N un peso corredizo, cuyo coeficiente de frotamiento es 0,1. Al disco de eje A está arrollada una cinta que pasa por P y rodea a otro disco, de peso $2P$, y se fija en Q, figura 48. La cinta no patina sobre el disco. Determinar el movimiento. [1, 3]

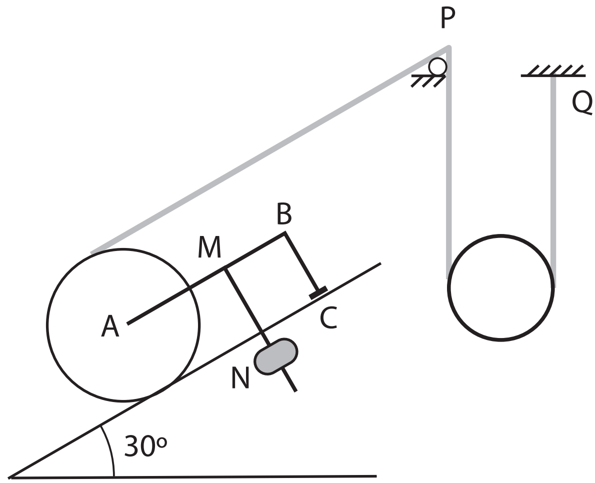


Figura 48: Sistema con zapata, peso deslizante y polea en un plano inclinado.

Ejercicio 53

Una pequeña esfera se mueve según una guía circular contenida en un plano vertical (un péndulo). El radio de esta guía es l. La guía está en un plano vertical que se mueve según un eje de radio R, con una velocidad angular constante ω, figura 49. Calcular R sabiendo que el período de las pequeñas oscilaciones de la esfera es T y admitiendo que la distancia de la masa perpendicular al centro siempre es R. Siendo el valor inicial de la amplitud de la oscilación θ_0, calcular para la posición de equilibrio relativo la reacción normal al radio de la curva y al plano vertical. [3, 6]

Ejercicio 54

Una viga rígida, de 5 m de luz y 200 kg de peso, apoya en su extremo O en una articulación fija, sin frotamiento. En el otro extremo se apoya en una viga transversal, elástica, figura 50, –sobre la que se hacen las siguientes hipótesis alternativas: a) su peso es despreciable, b) su peso es de 60 kg– en A, su punto medio.

En B disponemos de un motor, de 100 kg de peso, cuyo rotor pesa 45 kg y tiene una excentricidad de 3 mm. Bajo la acción de las cargas consideradas la viga transversal desciende 1 mm. Se pide la amplitud de la vibración forzada en A si el motor gira a 1400 RPM.

En el caso a) supondremos, primero, que no hay amortiguación y luego que dis-

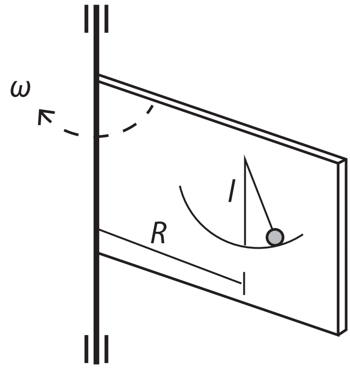


Figura 49: Péndulo en un plano vertical giratorio.

pondremos en A de un amortiguador tal que la relación entre dos oscilaciones sucesivas del sistema abandonado a sí mismo luego de apartado de su posición de equilibrio es 0,8. En este caso se determinará la frecuencia cuando se produce la resonancia y la amplitud de la vibración de resonancia. Suponiendo que en este segundo caso la resonancia se produce para una luz de 4 mm y que para esta luz la relación entre dos oscilaciones sucesivas sea 0,6 calcular el momento de inercia de la viga transversal. [1]

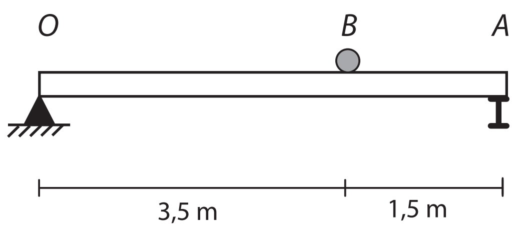


Figura 50: Viga rígida con un motor, apoyada en un perfil elástico.

Ejercicio 55

Un recipiente circular de radio r gira con velocidad constante ω, figura 51. Marcamos la altura que alcanza el líquido que contiene dicho recipiente cuando está en equilibrio relativo respecto al mismo. Supongamos ahora que el eje del recipiente se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado, a partir de una velocidad inicial v_0 vertical y dirigida hacia abajo, llegando al reposo después de un recorrido l. Para que el líquido alcance la misma altura marcada debemos ahora hacer girar el recipiente a una velocidad angular $\omega' > \omega$. Suponiendo conocidas ω' y ω, calcular v_0. [3]

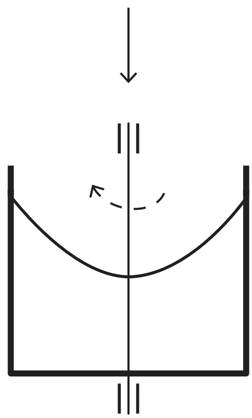


Figura 51: Recipiente que gira y cae en forma desacelerada.

Ejercicio 56

Un vehículo se está moviendo con velocidad v_0 cuando se aplican los frenos, figura 52. Admitimos que el motor deja entonces de actuar y que son despreciables todas las resistencias que no sean las de frenado. Si el par de frenado es proporcional al tiempo y el automóvil se detiene después de un recorrido l, determinar el coeficiente de frotamiento mínimo entre las ruedas y el piso para que no patine ninguna de las ruedas, sabiendo que el centro de gravedad G del vehículo se encuentra a una distancia νa sobre el pavimento, siendo a la distancia entre los ejes de las ruedas. [3]

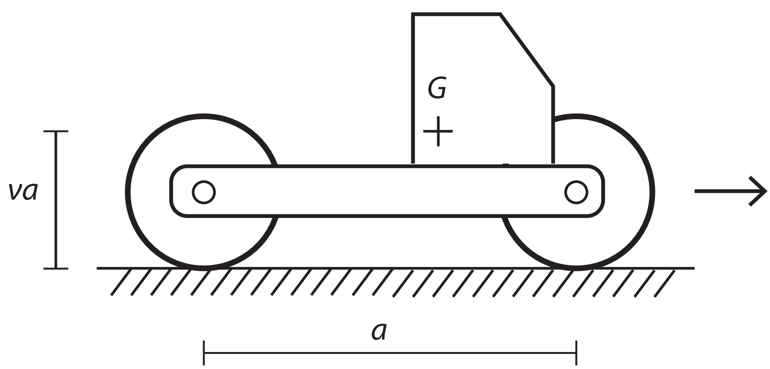


Figura 52: Vehículo que frena.

Ejercicio 57

Un disco, de masa m y radio $2r$, puede girar sin frotamiento alrededor de un eje vertical. Por dentro del eje del disco $\overline{MN}$ pasa una barra elástica empotrada en A y B.

Unido rígidamente a $\overline{AB}$ en el punto Q está el eje $\overline{QO}$, perfectamente indeformable, sobre el que puede girar otro disco, de masa m y radio r, figura 53. Si apartamos el eje $\overline{QO}$ de su posición de equilibrio un ángulo θ, la barra $\overline{AB}$ reaccionará con un par torsor $-k\,\theta$. Determinar el período de las oscilaciones de los dos discos cuando apartamos al sistema de su posición de equilibrio y lo abandonamos a sí mismo. [1, 3]

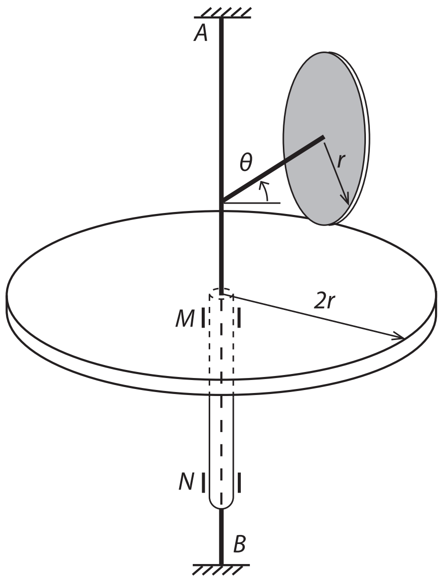


Figura 53: Sistema de dos discos con una barra de torsión.

Ejercicio 58

Dos cilindros homogéneos de peso $P = 100$ kg están ligados por una viga $\overline{ABC}$. Giran sin frotamiento alrededor de sus ejes B y C y ruedan sin deslizar sobre el plano. En el cilindro C está arrollado un hilo flexible, inextensible y sin peso, unido a su vez a un resorte de constante elástica $\lambda = 3,5$ kg/cm, cuya deformación en el instante inicial es a. En A está articulada, sin frotamiento, la palanca $\overline{QAR}$ que lleva en su extremo superior un peso $P = 100$ kg y en R una zapata de freno cuyo coeficiente de frotamiento con el cilindro es μ, figura 54. Determinar el movimiento del sistema en el instante en que la deformación del resorte pase de a ser mayor que a y la condición para que el cilindro no patine. Despreciamos la masa de la palanca y de la viga. Suponemos que $\overline{ABC}$ está en un plano baricéntrico perpendicular a los ejes. [6]

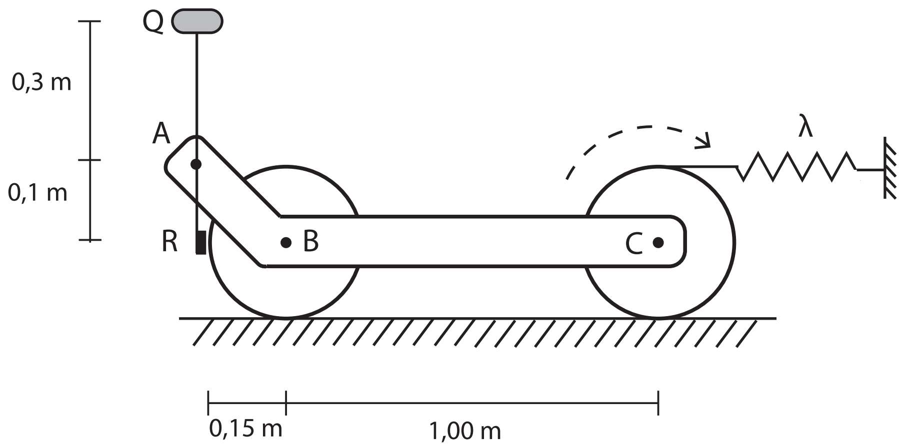


Figura 54: Sistema de dos discos con un chasis, freno inercial y resorte.

Ejercicio 59

El prisma $\overline{ABC}$, de peso P, descansa en un plano horizontal pulido. Un cilindro, de peso P y radio r, puede girar sin frotamiento alrededor de su eje, proyectado en O, y rueda sin deslizar sobre la cara $\overline{AB}$ del prisma. El eje O está unido al sistema de vigas $\overline{OPQ}$ que apoyan en Q sobre el prisma con un coeficiente de frotamiento f. Un motor, de peso P, está unido a $\overline{OPQ}$ en P y transmite al cilindro un par de potencia constante W, figura 55. Estudiar el movimiento. $\overline{PO} = 2\,r$, $f = 0{,}1$. [1, 3, 6]

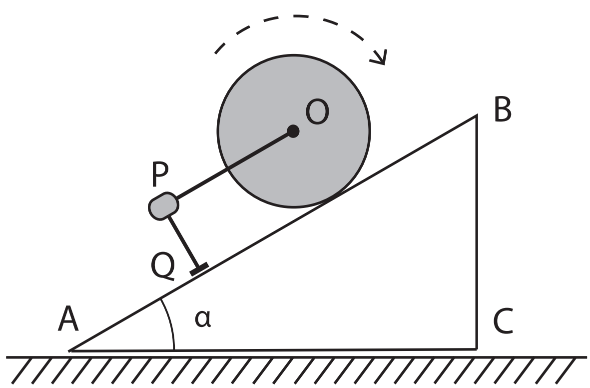


Figura 55: Cilindro, en un plano inclinado, con un motor y una zapata.

Ejercicio 60

Un disco, de masa m y radio $2\,r$, puede girar sin frotamiento alrededor de un eje vertical. Por el centro de este disco pasa una barra elástica $\overline{AB}$, empotrada en A y en B, cuyas dimensiones se indican en el croquis. Unido al eje $\overline{AB}$, en Q está el eje $\overline{QO}$, perfectamente indeformable, sobre el que puede girar, sin frotamiento, otro disco, de masa m y radio r, que se mueve respecto al primero sin que deslicen las superficies en contacto. Al primer cilindro está arrollado un hilo que pasa por la pequeña polea Q_1 y se arrolla a otro cilindro, de masa m y radio r, figura 56. Determinar el movimiento del sistema suponiendo que partimos del reposo y que para $t = 0$, $y = 0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = 0$. [1, 3]

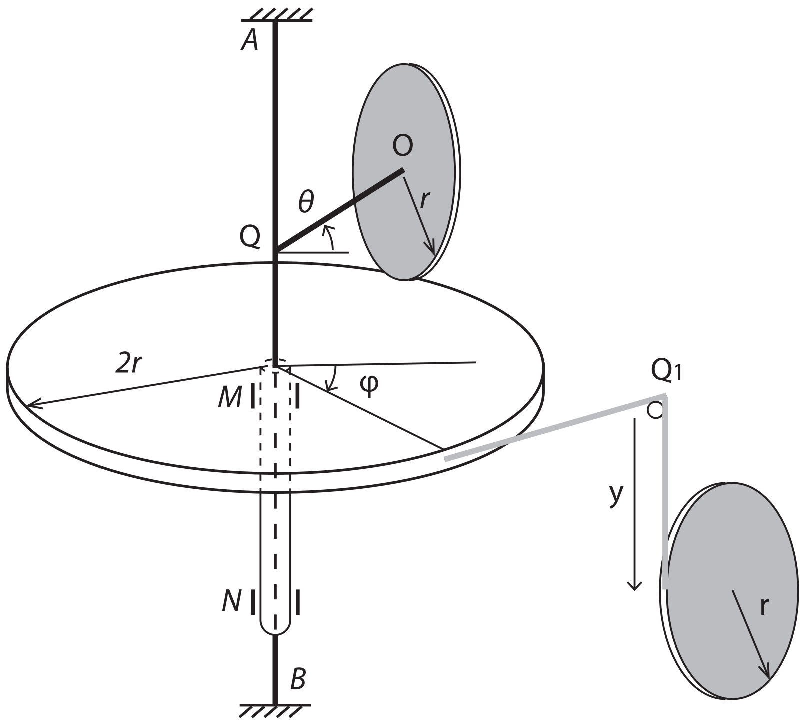


Figura 56: Sistema de dos discos, barra de torsión y polea.

Ejercicio 61

Un cilindro, de radio r y masa m, puede girar sin frotamiento alrededor de su eje $\overline{AB}$. El cilindro está rodeado por un hilo que sostiene un peso $m\,g$. Sobre el cilindro se apoya un aro de pequeño espesor, masa m y radio $5\,r$, figura 57. No hay deslizamiento entre el cilindro y el aro. ¿Con qué ángulo α habría que disponer el aro con respecto a cilindro para que se mantenga fijo el centro C? Determinar el mínimo coeficiente de rozamiento en D para que no haya deslizamiento. [1, 3]

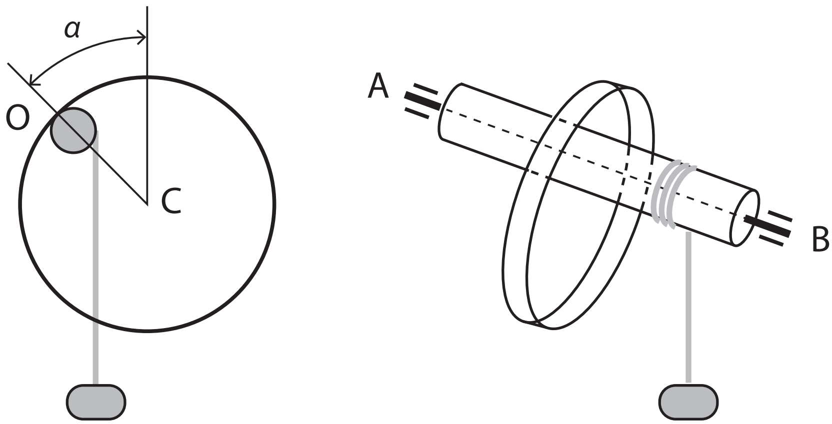


Figura 57: Cilindro con polea y aro.

Ejercicio 62

En un cono truncado, de eje vertical, de la figura está arrollado una cuerda, flexible e inextensible y de masa despreciable, cuyo extremo se mueve horizontalmente con una velocidad v_0, constante, de 1 m/seg, figura 58. Al iniciarse el movimiento (la cuerda horizontal) dista al plano que la contiene 10 cm de cada una de las bases del cono. El número inicial de vueltas de la cuerda es 100. Iniciado el movimiento constatamos que en un instante dado la cuerda se rompe. Se aplica entonces un freno a la periferia de la base mayor de acuerdo al croquis. El coeficiente de frotamiento en el freno es $f = 0{,}2$. Sabiendo que el cono es de hierro y que se detiene luego de tres vueltas, calcular la tensión de la cuerda en el momento de la rotura. Se desprecian todas las demás resistencias fuera de las indicadas. [1, 3, 6]

Ejercicio 63

Un plato –formado por un disco de radio $6\,r$ y masa m, tiene un borde cilíndrico de masa m y pequeño espesor– gira sin frotamiento alrededor de $\overline{AB}$ con velocidad angular ω_0, figura 59. La superficie superior es perfectamente pulida y contra su borde ponemos una esfera, de radio r y masa m, sin ninguna velocidad inicial. La superficie interior del borde cilíndrico y de la esfera son rugosas. Se pide hallar el movimiento del sistema a partir del momento en que el movimiento de la esfera respecto al disco se produce sin deslizamiento. [1, 6]

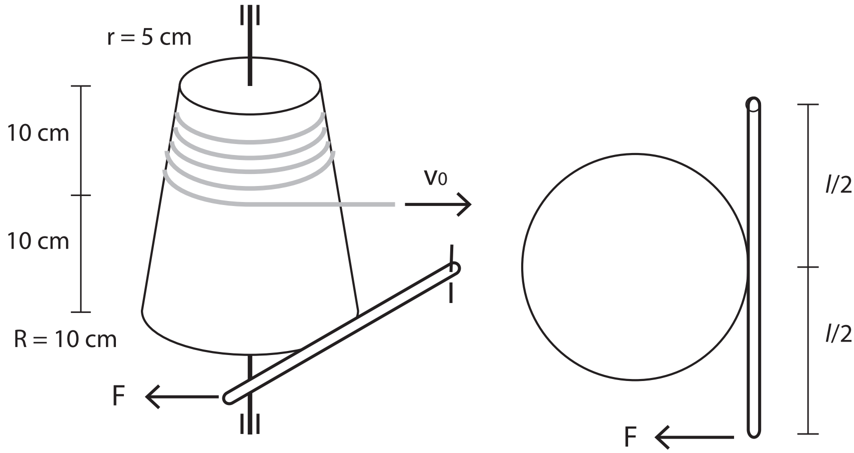


Figura 58: Cono con hilo enrollado y freno en la base.

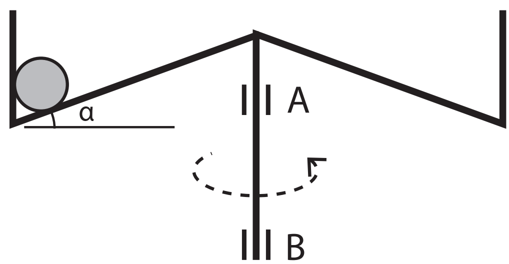


Figura 59: Bolita arrastrada por un plato de la sección presentada.

Ejercicio 64

Un disco, de masa m y radio r, descansa sobre un plano horizontal perfectamente pulido. El eje vertical $\overline{OP}$, de inercia despreciable, está unido rígidamente al centro P del disco y a él, a su vez, está también rígidamente unido el eje $\overline{O_1OO_2}$, de masa $m/4$, que lleva en sus extremos dos discos O_1 y O_2, de masa $m/2$ y radio $r/2$, que giran sin frotamiento en O_1 y O_2. Los bordes de estos discos están engranados en el borde del disco horizontal de modo que las superficies en contacto no deslizan, figura 60. Si apartamos el eje $\overline{O_1OO_2}$ de su posición de equilibrio un ángulo φ, el eje $\overline{OP}$ reacciona con un par $-\lambda\varphi$. Si despreciamos las deformaciones propias del eje $\overline{O_1OO_2}$ y lo apartamos de su posición de equilibrio un ángulo φ_0 manteniendo fijo el disco P y abandonamos el sistema a sí mismo, determinar el movimiento. [1]

Ejercicio 65

Un disco, de masa m y radio r, está rígidamente unido a un eje elástico $\overline{AC}$ que pasa por el cojinete $\overline{AB}$ y lleva en su extremo, rígidamente unida a él, la barra $\overline{DE}$, perfec-

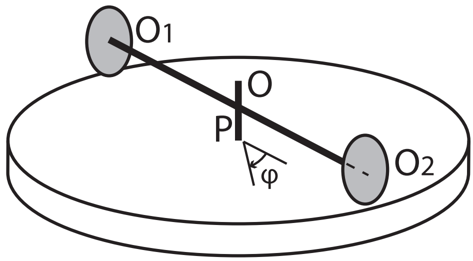


Figura 60: Disco sobre el cual giran dos discos con un par de torsión.

tamente indeformable, en cuyos extremos se disponen de dos resortes $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$, de constante λ, capaces de trabajar a tracción y compresión y cuyos ejes son normales a $\overline{DE}$. El eje $\overline{AC}$ reacciona con un par $-K\,\alpha$, si α es el ángulo girado por el extremo A respecto a C. Al disco está arrollado un hilo que, a su vez, se arrolla a otro disco igual al primero, figura 61. Para $t = 0$, $\theta = y = 0$. Además sostenemos al segundo cilindro para que $\alpha = 0$ y también sean nulas las deformaciones de los resortes. En estas condiciones, abandonamos el sistema a sí mismo y se pide calcular cuanto se estira una resorte para la variación del ángulo θ. [1]

Ejercicio 66

Un disco de masa m y radio r puede girar sin frotamiento alrededor de su eje $\overline{AB}$ horizontal y está vinculado mediante engranajes a otro eje $\overline{CD}$ de manera que a una vuelta del primer disco corresponden tres vueltas del segundo. Al segundo está unido otro disco, de masa m y radio r, al que está arrollado un hilo que pasa por la pequeña polea q fija, rodea a otro cilindro de masa $2\,m$ y radio $r/2$ y se fija en E, extremo de una palanca $\overline{EQR}$ sin peso, que apoya en R contra el primer disco con coeficiente de frotamiento igual a f, figura 62. Determinar el movimiento suponiendo que el hilo no patina sobre el cilindro. [1]

Ejercicio 67

Un cono de masa m y radio de la base r puede girar sin rozamiento alrededor de un eje vertical $\overline{AB}$. Por dentro del eje $\overline{AB}$ pasa una barra elástica empotrada en M y N. Unido rígidamente a $\overline{MN}$ en Q está el eje indeformable $\overline{OQ}$ sobre el cual un disco de masa m y radio r puede girar sin frotamiento alrededor de O, figura 63. Si apartamos el eje $\overline{OQ}$ un ángulo θ de su posición de equilibrio, la barra $\overline{MN}$ reacciona con un par elástico $-K\theta$. Sabiendo que el disco de eje O no patina con respecto a la periferia del cono, calcular el período de las oscilaciones del sistema apartado de su posición de equilibrio, manteniendo fijo el cono y desplazando el eje $\overline{OQ}$. [1]

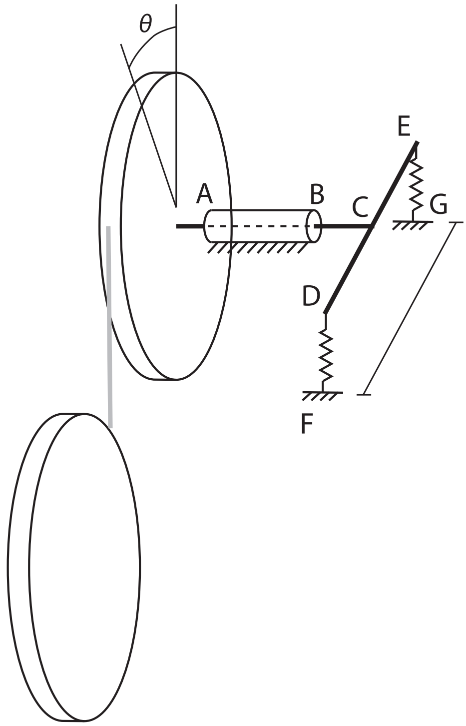


Figura 61: Sistema formado por dos discos y dos resortes.

Ejercicio 68

Un disco de radio r espesor e y momento de inercia I, colgado de una cinta elástica, se usa para medir viscosidad de los líquidos. Se mide el período T_1 de las pequeñas oscilaciones en el aire –cuya amortiguación se desprecia– y el período T_2 dentro del líquido. Admitimos que el par reactivo de la cinta es proporcional al ángulo girado. La fuerza viscosa sobre un elemento de área es $-\mu\, v\, dA$. Calcular μ en función de los datos. [6]

Ejercicio 69

Una viga $\overline{AB}$ de longitud $l = 4$ m y 500 kg de peso está articulada sin frotamiento en B. Cuelga en C de una barra de acero $\overline{CD}$, de 1,5 cm^2 de sección y 3 m de largo, que apoya en A en un resorte de constante $k = 600$ kg/cm capaz de trabajar a la tracción y a la compresión. En E se dispone de un motor eléctrico de 300 kg de peso, cuyo rotor pesa 100 kg y tiene una excentricidad de 0,5 mm y gira a 1.000 RPM. Se pide calcular la amplitud de la vibración forzada en A, suponiendo que: la viga $\overline{AB}$ pueda considerarse perfectamente rígida, que no hay amortiguación, que estando el sistema

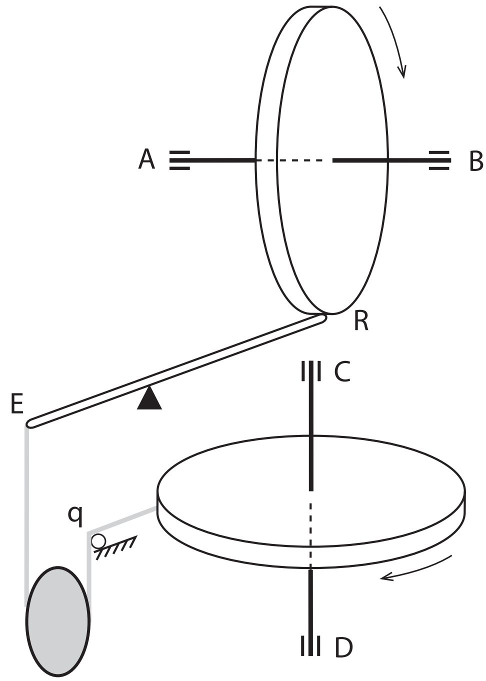


Figura 62: Sistema formado por dos discos, una palanca y una polea.

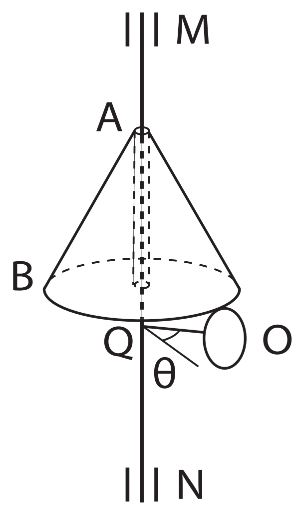


Figura 63: Sistema de eje, cono y disco.

en reposo, $\overline{AB}$ es horizontal y que el aparato se ha montado de tal manera que $\overline{CD}$ trabaja siempre a tracción. [1]

Ejercicio 70

Una viga $\overline{AB}$ está empotrada en A. Es de sección circular llena y unida rígidamente en C a otra viga $\overline{BC}$ por un perfil normal doble T de 14 cm, figura 64. Las vigas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen su línea media en un plano horizontal. En C está articulado a $\overline{BC}$ un tensor vertical cuyo diámetro es 25,4 mm, articulado a su vez en D a la viga horizontal $\overline{DE}$ que es un perfil doble T de 30 cm y que pesa 70 kg/m. Esta viga se supone infinitamente rígida. Tiene en E un empotramiento elástico capaz de generar un par $-K\theta$, siendo θ el ángulo en radianes que gira el extremo E. En F está montado un motor eléctrico de 600 kg de peso, cuyo rotor pesa 200 kg, tiene un excentricidad $e = 0{,}1$ mm y gira a 1.400 RPM. Se sabe que entre dos oscilaciones sucesivas del sistema, abandonado a sí mismo, la relación es 0,5. Se pide calcular la amplitud de la oscilación forzada suponiendo que el amortiguamiento actúa en F. Medidas: $\overline{AB} = \overline{DF} = l_1 = 1$ m, $\overline{BC} = l_2 = 1{,}20$ m, $I = 573$ cm^4, $\overline{CD} = l_3 = 2$ m $\phi = 25{,}4$ mm, $\overline{DE} = l_4 = 3$ m. [3, 6]

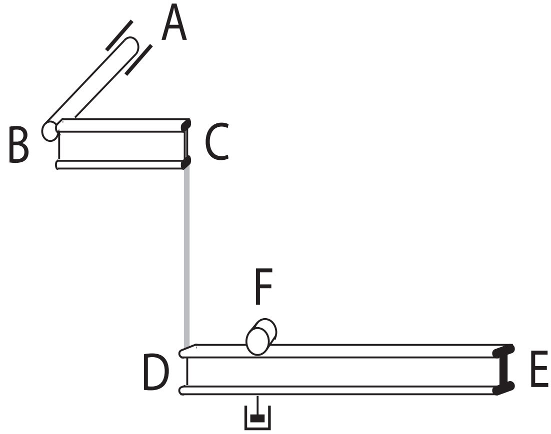


Figura 64: Sistema de vigas con un motor y amortiguador.

Problemas de choque

Ejercicio 71

Un prisma $\overline{ABCD}$, de masa $3\,m$, descansa sobre un plano horizontal rugoso y recibe en E el choque de una masa m que queda adherida a él y cuya velocidad anterior al choque es horizontal, figura 65. Encontrar la condición para que el movimiento posterior al choque sea un giro alrededor de A. Suponiendo que esta condición se cumple, determinar la velocidad v de la masa m necesaria para volcar el prisma y determinar el impuso en E. [1, 3]

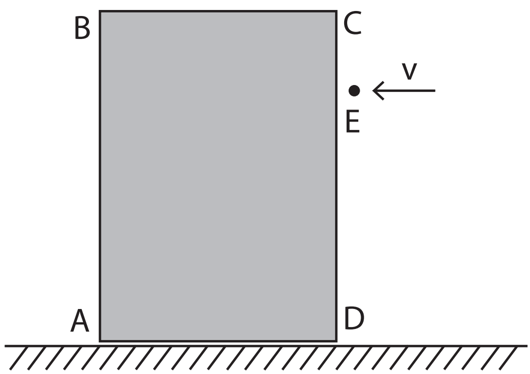


Figura 65: Prisma con impacto lateral.

Ejercicio 72

Dadas tres varillas iguales, articuladas, sin frotamiento, figura 66. sobre un plano horizontal liso, determinar la relación entre las velocidades angulares de la primera y la última varilla si se aplica un impulso I normal en el extremo de la primera varilla. [1, 3]

Ejercicio 73

Un triángulo $\overline{ABC}$, formado por tres barras, cae verticalmente y va a chocar, con choque elástico, en C con un prisma que descansa sobre un plano horizontal, figura 67. Suponemos que el único movimiento del prisma es horizontalmente. Determinar el acto de movimiento. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$. [1, 3]

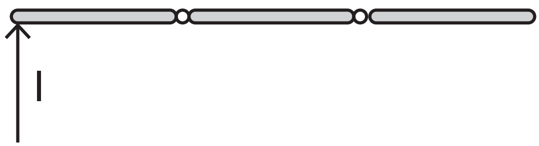


Figura 66: Tres varillas articuladas con un impacto en un extremo.

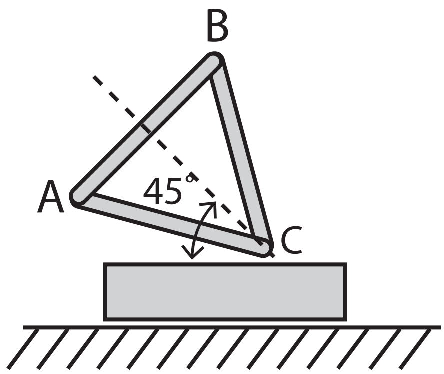


Figura 67: Triángulo en choque elástico con un prisma.

Ejercicio 74

Se considera una barra articulada en O_1, sin frotamiento, de peso P_1 y longitud l_1, figura 68. Se deja caer de su posición inicial $\overline{O_1 B}$ de modo que al llegar a la vertical choque, sin frotamiento, con el borde de un cubo de peso P_2, de arista a, articulado sin frotamiento en O_2. Suponiendo un coeficiente de restitución de 1/2, calcular el ángulo α de modo que vuelque el cubo. Calcular el impulso en A y las reacciones en O_2. [1, 3]

Ejercicio 75

Supongamos un disco de radio r y masa m que se mueve en un plano horizontal, rodando sin deslizar, que va a chocar plásticamente contra la arista C, figura 69. El movimiento posterior es un giro alrededor de C. Hallar la condición de la velocidad para que el disco pase para el otro lado. [1, 3]

Ejercicio 76

Una cadena formada por un número cualquiera de sólidos articulados unos con otros, sin frotamiento, sobre ejes paralelos proyectados en $A, B, C, \cdots$ cae con movimiento de traslación de velocidad v_0, manteniéndose los ejes en un mismo plano de posición

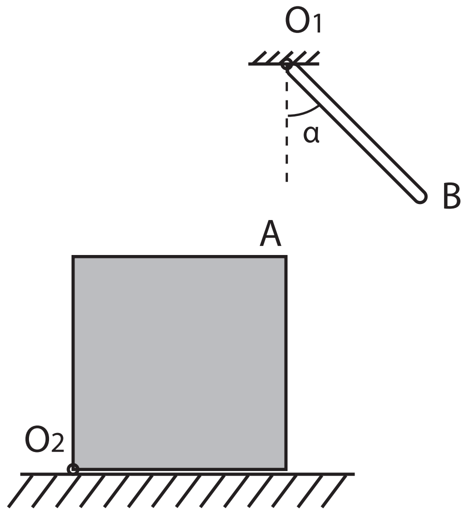


Figura 68: Varilla que cae y choca el borde de un cubo.

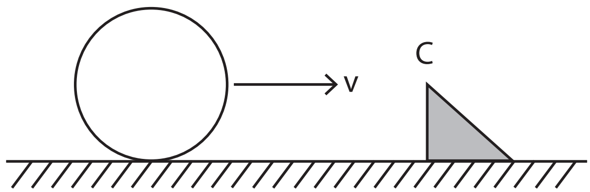


Figura 69: Disco que choca plásticamente contra un obstáculo.

constantemente horizontal, figura 70. Los dos sólidos de la derecha son dos discos iguales en radio y en peso, cuyos planos son perpendiculares. Mostrar que si el primer cuerpo de la izquierda choca con un obstáculo en O, las velocidades de rotación que adquieren los dos discos $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ está en la relación 10 a 3. El impacto en O se supone vertical. [1, 3]

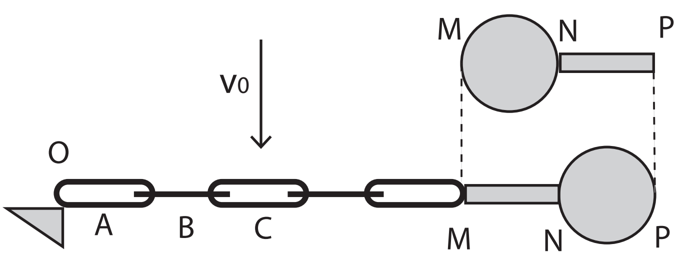


Figura 70: Cadena con dos discos en su extremo que choca en caída libre.

Ejercicio 77

Una barra homogénea, de longitud a, cae en posición vertical, desplazándose a lo largo de su propio eje, hasta chocar con velocidad v_0 contra un cilindro fijo en el punto A determinado, como indica la figura 71. No hay frotamiento. El extremo de la barra que toca al cilindro en A no rebota. Determinar el movimiento siguiente al choque. [1, 3]

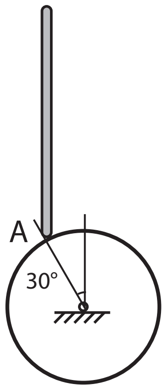


Figura 71: Barra que cae vertical, choca a un disco.

Ejercicio 78

Una placa rectangular homogénea $\overline{ABCD}$, de peso P, lado menor a y diagonal $2\,a$, descansa en reposo sobre un plano horizontal liso. Otra placa, de forma cualquiera, moviéndose con velocidad v_0, choca con la primera placa en C, figura 72. En este instante v_0 coincide en dirección con la bisectriz del ángulo $\widehat{BCD}$ y es normal a la tangente al perímetro de la segunda placa en C. El choque es plástico y sin frotamiento. Determinar el movimiento de la placa $\overline{ABCD}$ y la reacción impulsiva en C. La inercia de la segunda placa se supone muy grande en relación a la de la placa rectangular. [1]

Ejercicio 79

Dos discos articulados en O, de masa m y radio r, caen verticalmente con velocidad v_0 cuando el primer disco se engancha, en un gancho fijo, de modo que su único movimiento posible es un giro alrededor del gancho, figura 73. Determinar el estado de movimiento posterior al choque. [1, 3]

Ejercicio 80

Sea un prisma guiado a lo largo de una línea. Sobre éste chocan, en un mismo instante, dos discos con choque plástico, figura 74. Uno tiene un peso P y una velocidad angular

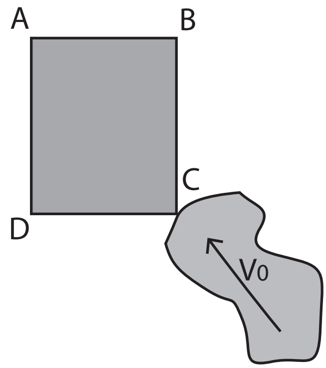


Figura 72: Objeto choca a un rectángulo.

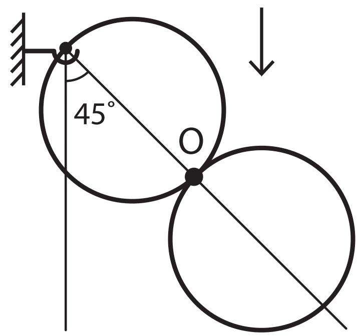


Figura 73: Discos articulados que caen, chocan a un gancho.

Ω_0 y el otro, un peso $P/2$ y una velocidad angular ω_0. Caen verticalmente (evidentemente las velocidades de caída vertical no interesan). Hallar el estado de movimiento luego del choque. [1, 3]

Ejercicio 81

Un disco, de peso P y radio r, gira con velocidad angular ω_0 alrededor de su eje proyectado en O. Un bloque cúbico, de peso P y lado a, choca con el primero con choque plástico de modo que en el choque el ángulo es de 45°, figura 75. Se pide calcular la pérdida de energía cinética en el choque. [1, 3]

Ejercicio 82

Un disco, de masa m y radio r, gira sin frotamiento alrededor de su eje C, extremo de una varilla $\overline{CD}$, sin peso, de longitud $l = 3\,r$, que puede girar sin frotamiento alrededor de O. En el instante inicial C está en C' y se abandona el sistema a sí mismo. Al caer, Q –que está inicialmente en Q'– lleva un gancho que se engancha en un tope

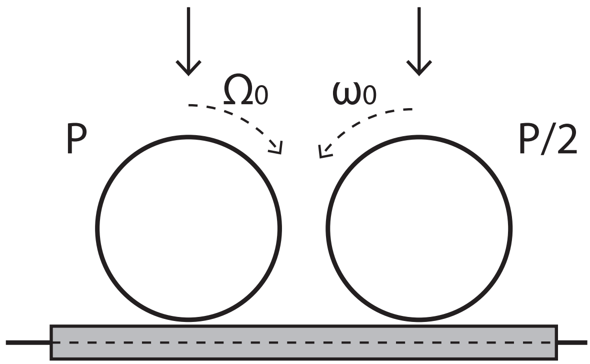


Figura 74: Discos que caen, chocan a una barra deslizante.

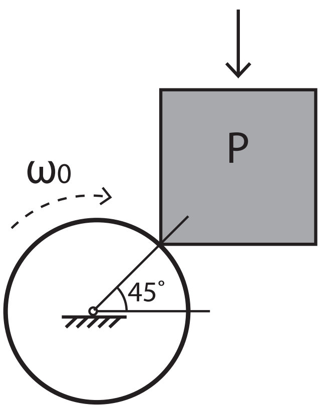


Figura 75: Cubo que cae, choca a un disco.

fijo cuando el sistema está en la posición de la figura 76. Se pide hallar las reacciones impulsivas en el tope. [1, 3]

Ejercicio 83

Una barra homogénea $\overline{AB}$, de peso P y longitud l, está suspendida de dos hilos iguales y paralelos, $\overline{MA}$ y $\overline{NB}$, de manera de formar un péndulo bifilar. Estando la barra en posición horizontal, animada de una velocidad v_0, choca contra un plano inclinado a 30° con la vertical. El choque es plástico y sin frotamiento. Determinar el movimiento de la barra subsiguiente al choque y las reacciones del plano inclinado en A y del hilo $\overline{NB}$ en B. [1]

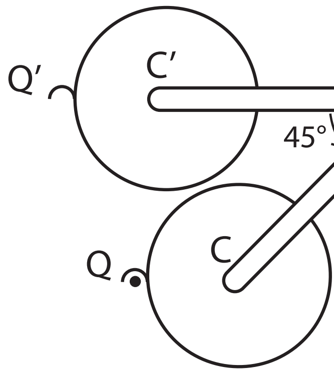


Figura 76: Disco con gancho y varilla que cae y se engancha.

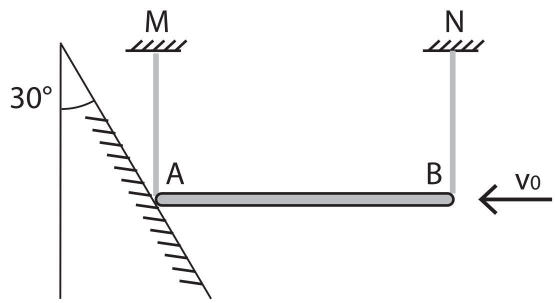


Figura 77: Péndulo bifilar que choca contra una pared.

Ejercicio 84

Dos barras homogéneas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, de longitudes a y $2a$ y pesos P y $2P$ respectivamente, están articuladas sin frotamiento en B y descansan sobre un plano horizontal liso, formando un ángulo recto. Se aplica un impulso F en C, en la dirección $\overline{CA}$. Determinar el movimiento de cada barra inmediatamente después del impulso. [1]

Ejercicio 85

El eje $\overline{AB}$, sin peso, puede girar sin frotamiento en sus cojinetes A y B. En el punto C de $\overline{AB}$ está articulada, sin frotamiento, una varilla $\overline{CD}$ de peso muy pequeño y de longitud l, cuyo único movimiento posible respecto a $\overline{AB}$ es una rotación del plano $\overline{ABCD}$. La varilla $\overline{CD}$ lleva en D una pequeña esfera de masa m y en C hay un resorte fijo a $\overline{AB}$ que aplica a $\overline{CD}$ un par $-K\varphi$, figura 79. La tensión del resorte es nula cuando la varilla $\overline{CD}$ está en posición horizontal. Cuando la esfera está en reposo, $\varphi = \pi/4$. En estas condiciones se aplica a la esfera un impulso F como indica la figura. Se trata de determinar F sabiendo en el movimiento subsiguiente al impacto la varilla

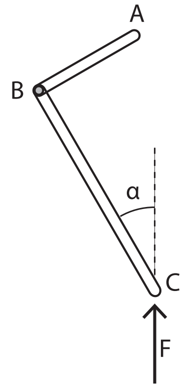


Figura 78: Dos barras articulada reciben un impulso.

$\overline{CD}$ llega a la posición horizontal. [1]

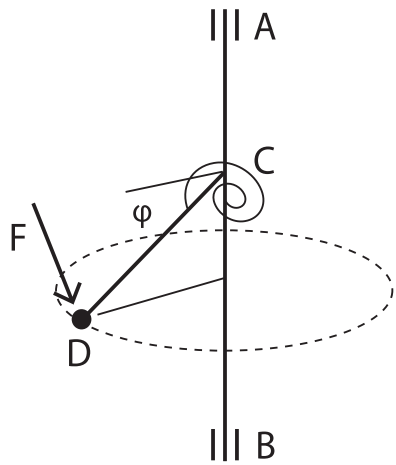


Figura 79: Sistema de eje, bolita y resorte sobre el cual se aplica un impulso.

Bibliografía

[1] Braga, Omar. *Cuaderno de ejercicios de Mecánica II, curso de 1962*. Comunicación personal.

[2] Dieste, Eladio. *Descripción de algunos equipos para la construcción de bóvedas*. Revista de Ingeniería, Montevideo, 3a. época, p. 8–21, V. 3, N. 9, 1991.

[3] Jerusalmi, Jaime. *Cuadernos de ejercicios de Mecánica II, curso de 1962*. Comunicación pesonal.

[4] Problema de examen propuesto en la Facultad de Ingeniería.

[5] Grompone, Juan. *Eladio Dieste, maestro de la ingeniería*. Texto electrónico en *www.grompone.org*.

[6] Macé, Néstor. *Cuaderno de ejercicios de Mecánica II, curso de 1961*. Comunicación personal.

[7] Mach, Ernst. *Desarrollo histórico–crítico de la mecánica*. Espasa Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires, 1949.